

MECHANIKA

2. félév

Budó:

Kísérleti fizika I.

Holics:

Fizika

Holics:

Fizikai összefoglaló

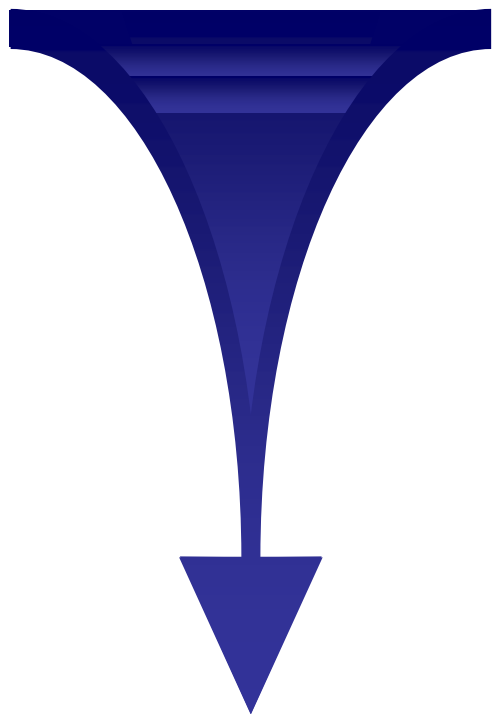
Tasnádi-Bérces-Skrapits-Litz: Mechanika I-II + Hőtan

DEFORMÁLHATÓ TESTEK

**szilárd testek rugalmas alakváltozásai,
folyadékok és gázok statikája és áramlása**

HULLÁMMOZGÁS

**csillapodó rezgések, kényszerrezgés,
hullámmozgás, hullámok összetevése,
többdimenziós hullámok,
hangszerek**



DEFORMÁLHATÓ TESTEK

merev test = ideális eset $\approx$ szilárd testek (kristályos /egykrist. v. polikrist., amorf)

folyadék: nincs határozott alakja, de $V = \text{áll.}$ (amorf szerk. hasonló a foly.-hoz)

gáz: sem alak, sem $V \neq \text{áll.}$

SZILÁRD TESTEK RUGALMAS ALAKVÁLTOZÁSAI

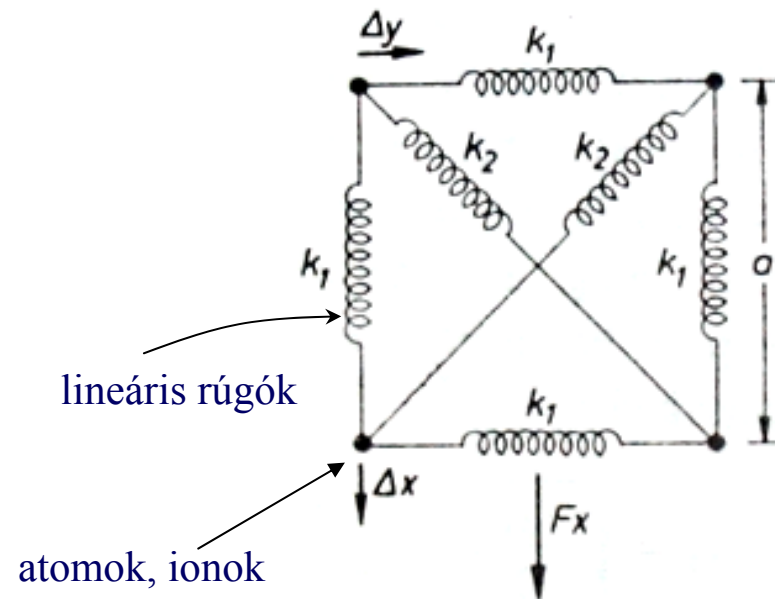
rugalmas: erőhatás $\longrightarrow$ alakváltozás; erőhatás megszűnik $\longrightarrow$ alakvált. megszűnik

ideális rugalmasságot közelítik a szilárd testek kis alakvált. esetén (rugalmasság határa alatt)

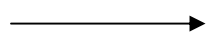
pl.: rúgó, csavarrúgó, drót megnyújtása, rúd le/behajlása, gumilabda összenyomása,

kísérlet : kül. hosszúságú drótokat, rúgókat kül. nagyságú erőkkel nyújtva (rúdnál összenyomva is) a drótok hossza nő

de $\Delta \ell_1 / \ell_1 = \Delta \ell_2 / \ell_2 = \dots$ bármilyen hossz esetén



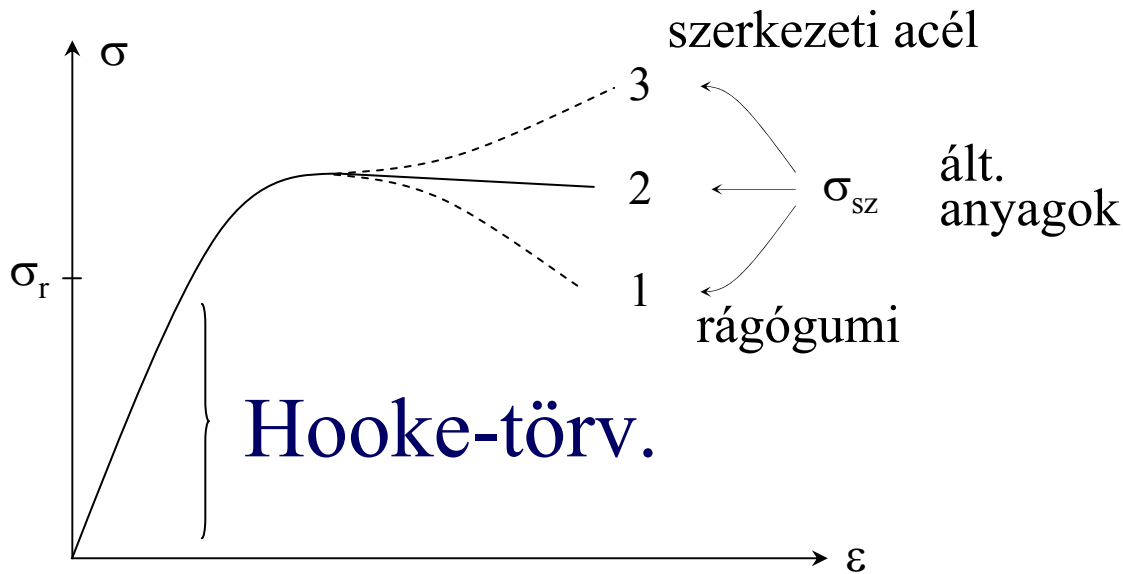
ideális rugalmasság



1676: HOOKE – törvény :

nyúlásra és összenyomásra :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A}$$

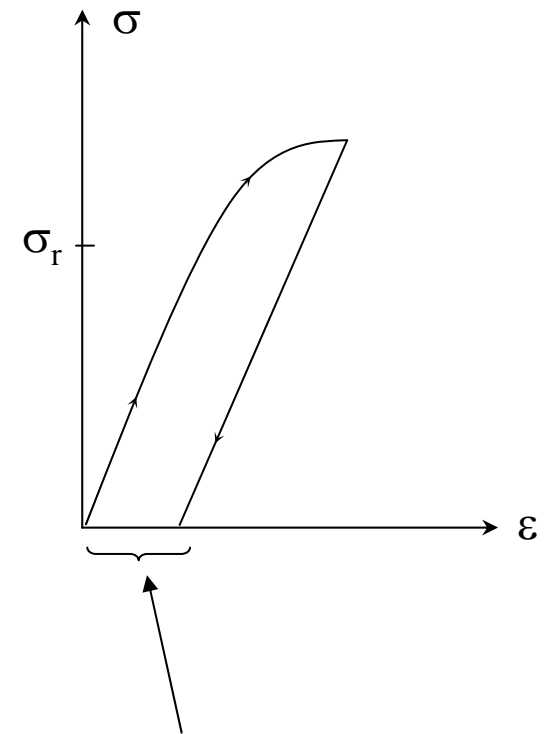


rugalmas
alakvált.

a rugalmasságon „túl” képlékenység



maradó alakváltozás

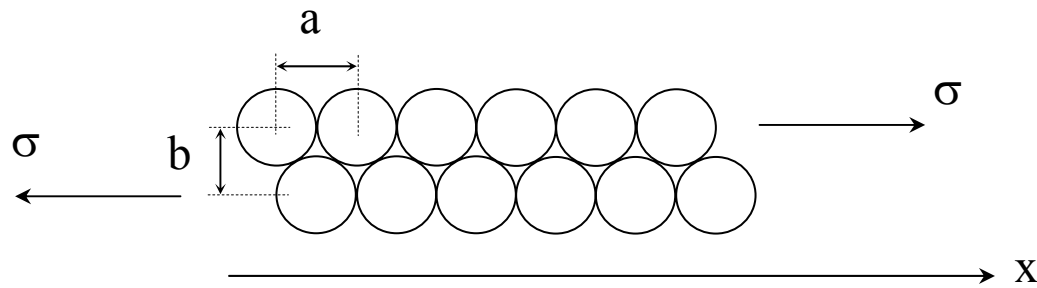


pl. képlékeny alakvált.-ra :

kilágyított (= átkristályosított) anyagok meglepően képlékenyek

pl. : kilágyított Cu-drót saját súlyától lehajlik (egyébként nem)

„meglepő” = több nagyságrenddel kisebb fesz. kell a képl. alakvált.-hoz, mint az alábbi egyszerű modell jósolja :



vonalhíák (diszlokációk) szerepe
(részletesebben ld. később ill. az ANYAGSZERKEZET c. kurzusban)

visszatérve a rugalmas alakvált.-ra :

izotróp anyagokra:
(pl. polikrist. fémek)

(egykrist.
irányfüggő lehet)

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

rel. megnyúlás
(= alakváltozás)

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

feszültség

longitudinális fesz., a terhelőerőre $\perp$ keresztmetszetre vonatk.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

← differenciális Hooke-törv.

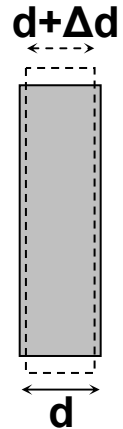
Young-modulus; fémekre : $E \approx 10^5 \text{ N/mm}^2$
(vagy nyújtási rug. mod.) 10^{11} N/m^2

100 GPa

harántösszehúzódás is van:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

Poisson-szám, fémekre $\approx 0.2-0.3$



térfogatvált. is van :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{(\ell + \Delta \ell) \cdot (A + \Delta A) - \ell \cdot A}{\ell \cdot A} = \frac{\ell \cdot A + \ell \cdot \Delta A + \Delta \ell \cdot A + \Delta \ell \cdot \Delta A - \ell \cdot A}{\ell \cdot A} = \\ &= \frac{\ell \cdot \Delta A + \Delta \ell \cdot A + \Delta \ell \cdot \Delta A}{\ell \cdot A} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta \ell}{\ell} + \frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell} \approx \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta \ell}{\ell} = (1 - 2\mu) \frac{\Delta \ell}{\ell} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta \ell}{\ell} \rightarrow \text{pl. téglalap keresztmetszet (a \cdot b) esetén :}$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{(a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b) - a \cdot b}{a \cdot b} = \frac{a \cdot b + a \cdot \Delta b + \Delta a \cdot b + \Delta a \cdot \Delta b - a \cdot b}{a \cdot b} \approx$$

$$\approx \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = -2\mu \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

$$\frac{\Delta V}{V} \approx (1 - 2\mu) \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

mivel a tapasztalat szerint húzásnál V nem csökken $\rightarrow \mu \leq 0,5$

összenyomásnál $\sigma < 0$

$$\sigma = -p$$

nyomás: $p = \frac{F}{A}$

$$[\sigma] = [p] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa p$$

kompesszibilitás : $\kappa = 3 \cdot \frac{1 - 2\mu}{E}$

a feszültség fogalmának általánosítása :

$\sigma = \frac{F}{A}$ a teng.-re $\perp$ elválasztó felület 2 oldalán elhelyezkedő rúd-darab által felület-egységenként egymásra gyakorolt erő nagysága

de elképzelhető ferde elválasztó felület is :



most is egyensúly $\longrightarrow$ a két rúd-rész egyforma F nagyságú erővel kell, h. húzza egymást, csak $F \times$ felületre

a felületegységre ható F kisebb mint $\perp$ felület esetén

az $\vec{r}$ helyen levő, $\vec{n}$ normálisú kis felületdarabkára a másik által felületegységenként gyakorolt erő

$$\vec{\sigma}(\vec{r}, \vec{n}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} \quad \text{függ a felület irányításától is}$$



ez a feszültség általánosabb def.-ja (vektor !)

speciális helyzetű felületelemektől eltekintve $\vec{\sigma}$ -nak van érintő irányú komponense is



csúsztató- vagy nyíró fesz.

feszültségi tenzor.... $\longleftarrow$ a normális komponens pedig a húzó (nyomó) fesz.

a húzott anyaghoz potenciális energia is rendelhető :

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta \ell^2$$

Hooke-törv.:

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A} \quad \longrightarrow \quad F = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \Delta \ell$$

$$k = \frac{E \cdot A}{\ell}$$

rúgóállandó

megnyúlás

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \Delta \ell^2$$

a tf.-egységre eső pot. E = potenciális energiasűrűség =

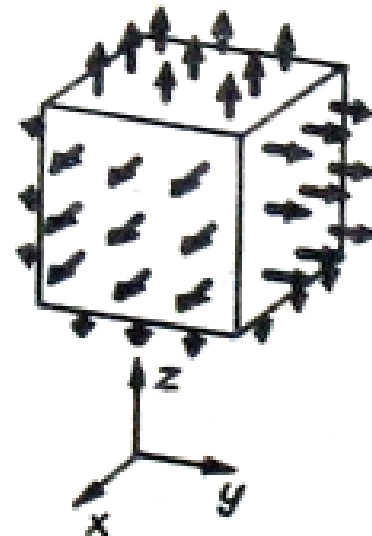
$$u = \frac{E_{pot}}{V} = \frac{1}{2} \frac{E \cdot A}{\ell^2 \cdot A} \cdot \Delta \ell^2 = \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right)^2 = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

többoldalú húzás és összenyomás; térfogati rugalmasság :

nem csak 1 irányban húzzuk (nyomjuk), hanem pl. $\forall$ oldalról egyszerre

egyszerűség kedvéért vegyünk kockát $\longrightarrow$

pl. az x-irányú él nyúlik az x-irányú húzás miatt, de az y- és z-irányú nyújtás miatt is:

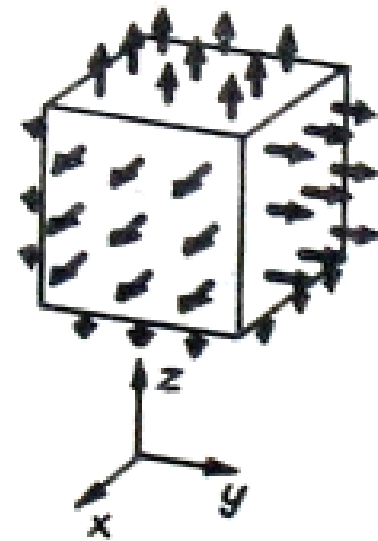


x-irányú él hosszvált.-a az x-normálisú lapokra ható húzóerő miatt:

$$\Delta \ell_{xx(1)} = \ell \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{F_1}{A}$$

a másik két lapra ható erők miatt pedig ($\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta \ell}{\ell}$ miatt) :

$$\Delta \ell_{xx(2)} = -\mu \cdot \ell \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{F_2}{A} \quad \text{és} \quad \Delta \ell_{xx(3)} = -\mu \cdot \ell \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{F_3}{A}$$



a teljes rel. alakvált. :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta \ell_{xx}}{\ell} = \frac{1}{E} \cdot \left[\frac{F_1}{A} - \mu \left(\frac{F_2}{A} + \frac{F_3}{A} \right) \right]$$

**ez érv. a test belsejéből
képzeletben kivágott
kockára is**

**(ha F a szomszéd darab
által rá kifejtett erő)**

**legyen σ_{xx} := az x-normálisú felületre ható fesz.-vektor x-komponense
 σ_{yy} és σ_{zz} a másik két norm. felületre ugyanez**

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_{xx} - \mu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right]$$

← általános Hooke-törv.

ez összenyomásra is érv.: akkor σ és ε is < 0

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad \longrightarrow \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{(\ell + \Delta\ell_{xx}) \cdot (\ell + \Delta\ell_{yy}) \cdot (\ell + \Delta\ell_{zz}) - \ell^3}{\ell^3} \approx$$

$$\approx \frac{\Delta\ell_{xx} + \Delta\ell_{yy} + \Delta\ell_{zz}}{\ell} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (1 - 2\mu) \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

ha speciálisan minden oldalra ugyanakkora nyomóerő hat felületegységenként :

$$-\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = -\sigma_{zz} =: p \geq 0$$

nyomás

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \cdot p \cdot [1 - 2\mu]$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -3 \cdot \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot p = -\frac{1}{K} \cdot p = -\kappa \cdot p$$

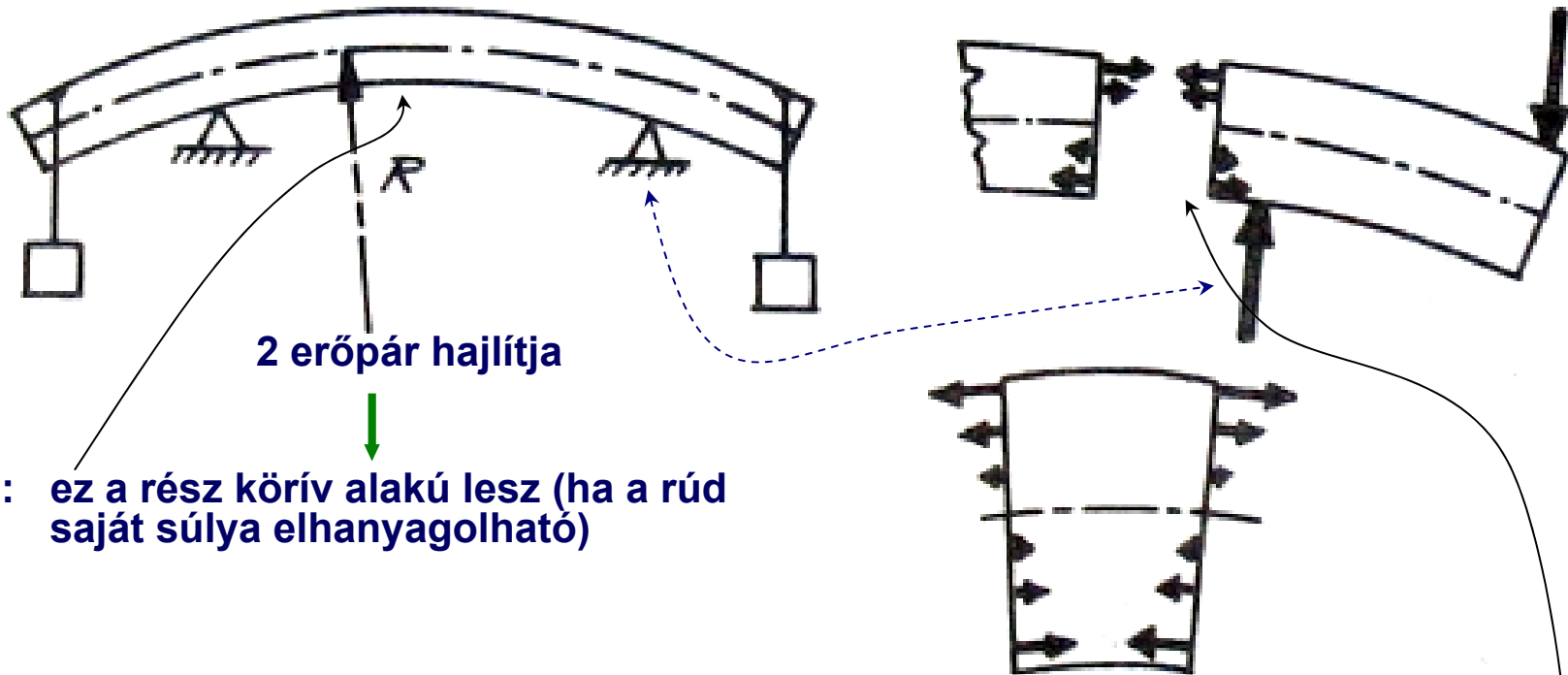
kompesszibilitás : $\kappa = 3 \cdot \frac{1 - 2\mu}{E}$

kompessziómodulus : $K = \frac{1}{\kappa} = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2\mu)}$

pl.: $\forall$ oldalú összenyomás pl. magas folyadékoszlop alján, vagy zárt edényben ha dugattyúval megnyomjuk

a szilárd testek észrevehető tf.-vált.-hoz igen nagy nyomóerők kellene (azaz κ kicsi)

hajlítás :



tapasztalat : ez a rész körív alakú lesz (ha a rúd saját súlya elhanyagolható)

képzeletben bontsuk a rudat a hossz teng.-vel $\parallel$ szálakra

tapasztalat : neutrális szál ! (= nem vált. a hossza)

„alatta” összenyomódás, „fölötte” nyúlás

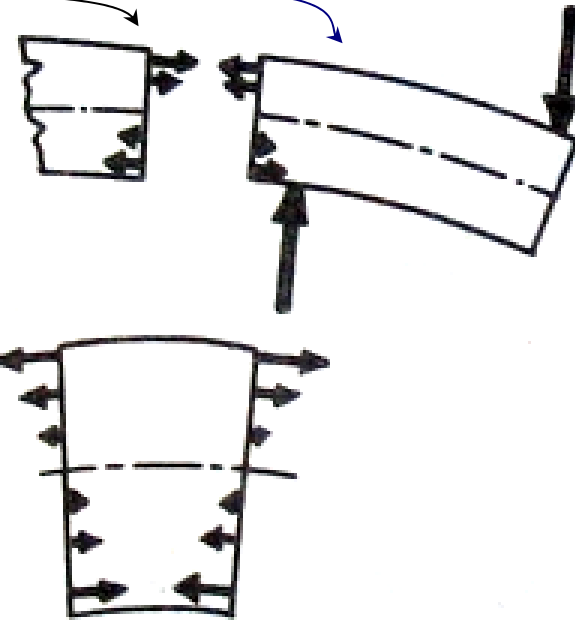
deformáció $\approx$ a rúd teng.-re $\perp$ keresztmetszetek az ábra síkjára $\perp$ teng. körül elfordulnak

a keresztmetszet mentén az egyes részek deformációja más

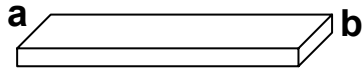
a differenciális Hooke-törv. szerint a feszültségek is

gondolatban vágjuk keresztbe ott

ez a db. erre a db.-ra olyan forgatónyomatékokat gyakorol, hogy egyensúlyozza a teher és az alátámasztás forgatónyomatékát



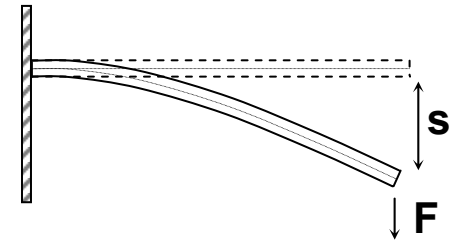
téglalap keresztmetszet esetén :



$$\frac{1}{R} = \frac{12}{E \cdot a \cdot b^3} \cdot M$$

egyik végén befogott rúd lehajlása

$$s = \frac{4}{E} \frac{\ell^3}{ab^3} F$$



de: a befogáshoz közeledve egyre nagyobb forgatónyomaték kell rúd végére ható erő forgatónyomatékának kiegyensúlyozásához

→ a keresztmetszetekben egyre nagyobb fesz.-k ébrednek → a tövéhez közeledve egyre nagyobb a görbülete

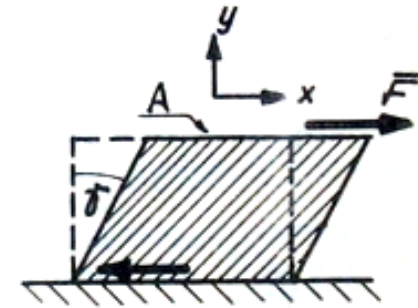
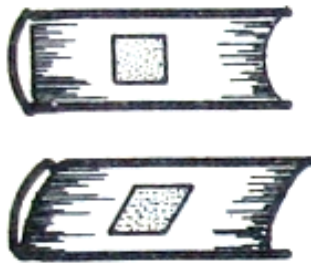
és : egy adott keresztmetszet két oldalán levő részek egymásra függőleges erővel is hatnak (hogy „ne essen le”)

két végén alátámasztott rúd behajlása

$$s = \frac{1}{4E} \frac{\ell^3}{ab^3} F$$

nyírás, csavarás:

kísérlet : könyv vagy szivacs
nyírása;
olló



a testre (testbe) rajzolt téglalap (téglatest) paralelogrammává
(paralelepipedonná) változik

a felülettel $\parallel$ erők (= nyíróerők) okozzák

alakváltozás $\rightarrow$ adott alakvált. után belső fesz. = nyírófesz. ébred

egyensúlyban lesz

a fesz.-nek normális komponense is van $\rightarrow$ a forgatónyomatékok kiegyensúlyozásához
(de ha a test „lapos” $\rightarrow$ elhanyagolható)

tiszta nyírást lehet csinálni pl. így

folyadék : benne egyensúly esetén nem lépnek fel nyíróerők
egyébként $\forall$ feszültségek hatására nincs egyensúlyban $\rightarrow$ folyik
kivétel : a minden irányú egyenletes nyomás

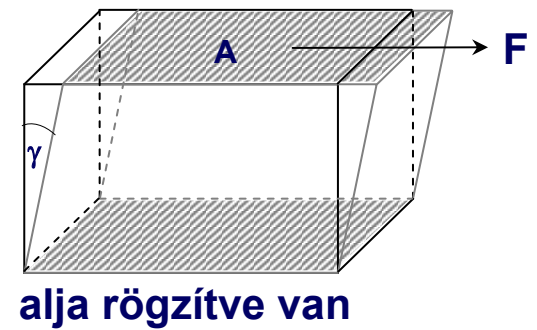
pl. : amorf test = folyadék, pl. vsz.-en befogott üvegrúd évek alatt láthatóan lehajlik a saját
súlya alatt $\rightarrow$ amorf szilárd testek = nagy belső súrlódású folyadékok

- nyírás :

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \frac{F}{A}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\tau \equiv \sigma_t = \frac{F}{A}$

nyírási (csúsztatási; torzió) modulusz



- csavarás :

kísérlet : csavarás modellen

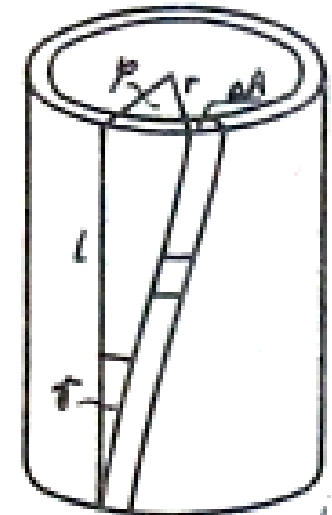
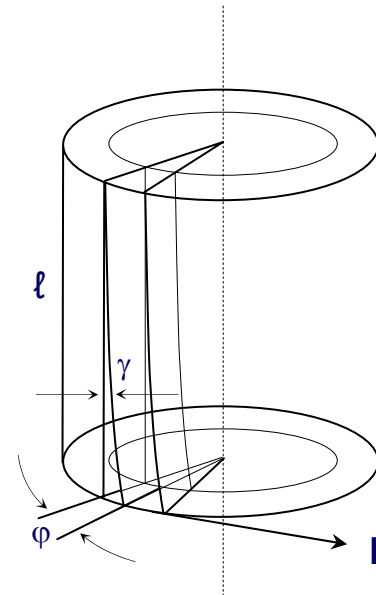
a csavarás is nyírás $\rightarrow \gamma = \frac{1}{G} \cdot \frac{F}{A}$

az ábráról :

$$\gamma \cdot \ell = \varphi \cdot r$$

$$\gamma = \varphi \cdot \frac{r}{\ell}$$

vékonyfalú cső csavarása :



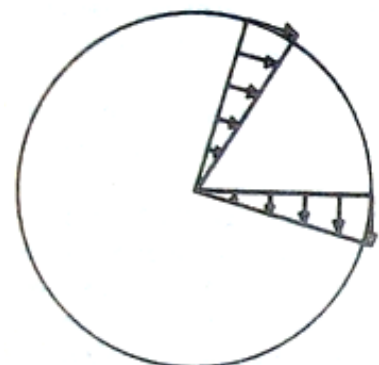
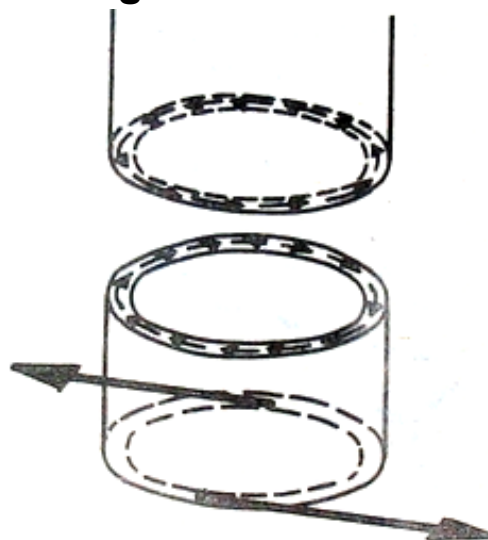
a teng.-re $\perp$ keresztmetszet egy ΔA felületelemére a szomszéd által érintőlegesen gyakorolt erő :

$$\Delta F = \sigma_t \cdot \Delta A = G \cdot \gamma \cdot \Delta A = G \cdot \frac{r \cdot \varphi}{\ell} \cdot \Delta A$$

ennek forgatónyomatéka : $\Delta M = r \cdot \Delta F = G \cdot \frac{\varphi}{\ell} \cdot r^2 \cdot \Delta A$

$$M = 2\pi G \cdot \frac{\varphi}{\ell} \cdot r^3 \cdot \Delta r$$

megcsavart cső :

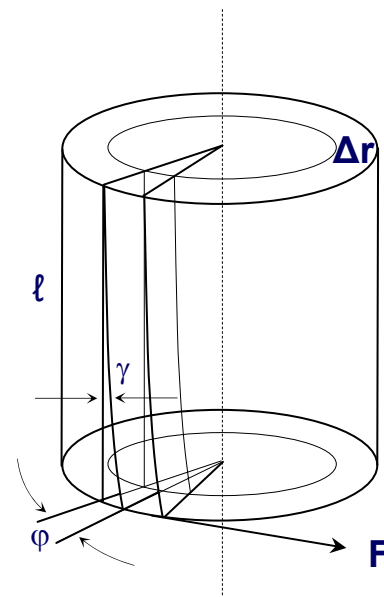


megcsavart rúd =
= egymásba tolt
koncentrikus csövek



a fesz.-eloszlás kifelé
haladva egyre nő

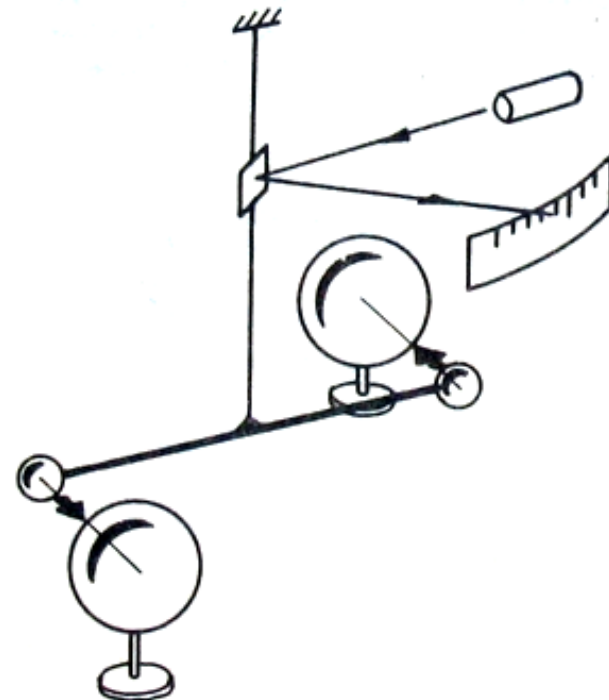
$$M = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G}{\ell} \cdot R^4 \cdot \Delta\varphi \rightarrow \text{torziós szál csavarási rúgóállandója (M=k} \cdot \varphi \text{): } k = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G}{\ell} \cdot R^4$$



torziómodulus mérése :

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G}{\ell} \cdot R^4 \cdot \Delta\varphi \quad \longrightarrow \quad \text{R-el a M rohamosan csökken !!!}$$

Cavendish, 1798 : a földi testek közötti gravitáció mérése



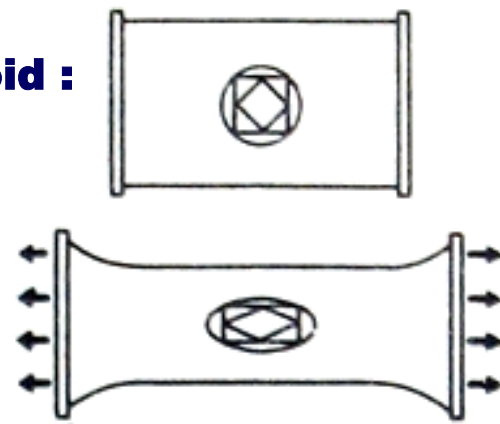
rugalmas energiasűrűség nyírési alakvált. esetén :

$$u = \frac{G}{2} \gamma^2$$

izotróp testek általános deformációja, deformációs ellipszoid :

tetsz. deformáció esetén egy gumilapra rajzolt kör (a tf.-ban gömb) ellipszissé (ellipszoiddá) nyúlik, ha a gumilapot nyújtjuk

egy olyan kis kocka deform.-ja, melynek átlói $\parallel$ -k az ellipszoid tengelyeivel, nyírás; egy olyané, melynek élei $\parallel$ -k az ellipszoid tengelyeivel, nyújtás v. összenyomás



az ellipszoid főtengelyeinek irányait a **deformáció főirányainak** nev.

főmegnyúlások : a relatív alakváltozások (a deformációs ellipszoid főtengelyeivel kifejezhetők)

$$\varepsilon_1 = \frac{r_1 - r}{r} \quad \varepsilon_2 = \frac{r_2 - r}{r} \quad \varepsilon_3 = \frac{r_3 - r}{r}$$

deformációk és feszültségek összefüggése : általános Hooke-törv.:
az ε_{ij} deformációk és σ_{ij} feszültségek között
lineáris egyenletek érvényesek,
a főmegnyúlások és főfeszültségekre
az együtthatók a test rugalmas állandói

általános deform.: a test egyszerre szenved húzást, csavarást és hajlítást



a főirányok pontról pontra változhatnak, de a test elég kis db.-jának deform.-ja mindig leírható úgy, mint a főirányokban történő nyújtás v. összenyomás



a nyírás is visszavezethető nyújtásra (összenyomásra), és összefüggés található a rug. modulusok között:

rugalmassági együtthatók összefüggése:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad \left(\leq \frac{E}{2} \right) \quad \left(\text{és} \quad \kappa = 3 \frac{1 - 2\mu}{E} \right)$$

az egykristályok rug. viselkedésének leírásához több anyagjellemző kell (legáltalánosabb esetben 21)

az energiaminimum elve és az energiamegm. rug. alakvált.-k esetén :

a rug. test egyensúlyban stabil áll.-ban van (éppen úgy volt def.-va a rug. tulajdonság, h. az anyag visszatér ebbe az állapotba a terhelés megszüntetése után)

az egyensúly stabilitása nemcsak a külső erőktől mentes nyugalmi állapotban telj., hanem külső erők ill. kényszererők hatására létrejövő fesz.-i állapotban is

→ kivétel : vékony rúd összenyomása → kis zavar hatására kihajlik :

ha a testet kényszerekkel deformáljuk (pl. egy szalagot adott hosszúságúra nyújtunk) → a test részei úgy rendeződnek el, h. a rug. E az új feltételek mellett min. legyen

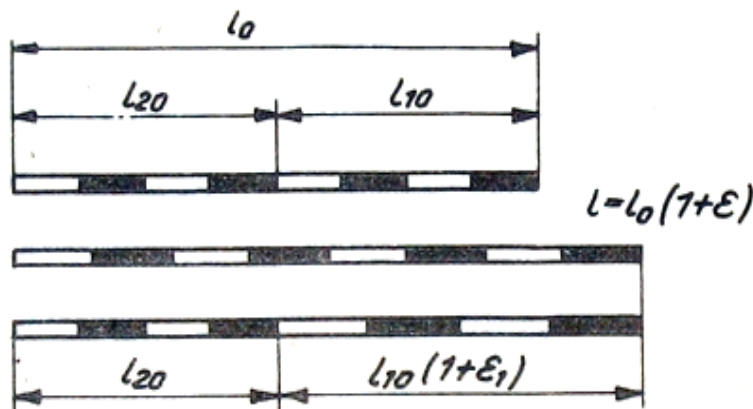
ha a testet konzervatív külső erő deformálja → a beálló egyensúlyi állapot az lesz, amelyben E_{rug} + a külső erőhöz tartozó E_{pot} összege min. lesz



pl. : egy ℓ_0 kezdeti hosszúságú vékony rudat ℓ hosszúságúra nyújtunk :

mikor lesz nagyobb E_{rug} ?

- amikor az egész egyenletesen megnyúlik, $\varepsilon =$ áll. a rúd mentén, vagy
- amikor csak az ℓ_{10} szakasz nyúlik meg (ε_1) és ℓ_{20} változatlan marad



$$E_{\text{rug}} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \cdot A \ell_0 \quad \text{ill.} \quad E_{\text{rug},1} = \frac{1}{2} E \varepsilon_1^2 \cdot A \ell_{10}$$

mivel a teljes megnyúlás $\forall 2$ esetben ugyanakkora : $\varepsilon \ell_0 = \varepsilon_1 \ell_{10}$

$$\varepsilon \ell_0 = \varepsilon_1 \ell_{10} \quad \longrightarrow \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{\ell_{10}}{\ell_0} \quad \longrightarrow \quad \frac{E_{\text{rug}}}{E_{\text{rug},1}} = \frac{\varepsilon^2 \ell_0}{\varepsilon_1^2 \ell_{10}} = \frac{\ell_{10}^2 \cdot \ell_0}{\ell_0^2 \cdot \ell_{10}} = \frac{\ell_{10}}{\ell_0} < 1$$

egyenletes deform.-nál kisebb a rug. energia !

pl. : egy ℓ_0 hosszúságú rugalmas szalag felső végét rögzítjük, az alsó végére pedig egy m tömegű testet akasztunk; milyen helyzetben lesz a rdsz. teljes pot. E-ja minimális ?

mivel E_{rug} egyenletes megnyúlás esetén lesz min., csak a teljes E-min.-hoz tartozó hosszúságot kell megtalálni :

mivel

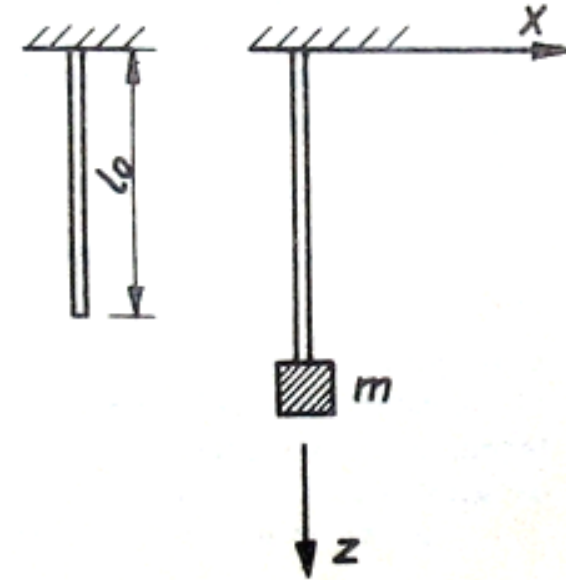
$$E_{\text{pot, teljes}} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \cdot A \ell_0 + mgh = \frac{1}{2} E \left(\frac{z - \ell_0}{\ell_0} \right)^2 \cdot A \ell_0 + mg(-z)$$

és az E azon hosszúságnál lesz min., ahol $\frac{dE_{\text{pot, teljes}}}{dz} = 0$:

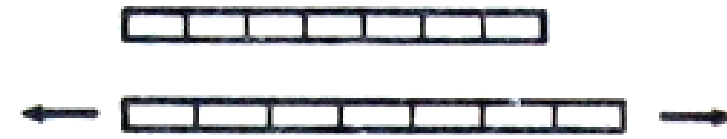
$$\frac{dE_{\text{pot, teljes}}}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} E \left(\frac{z - \ell_0}{\ell_0} \right)^2 \cdot A \ell_0 - mgz \right] = \underbrace{EA \frac{z - \ell_0}{\ell_0}} - mg = 0$$

$$\frac{z - \ell_0}{\ell_0} = \frac{mg}{EA} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon = \frac{mg}{EA}$$

ami éppen a Hooke-törv. szerinti egyensúlyi megnyúlás

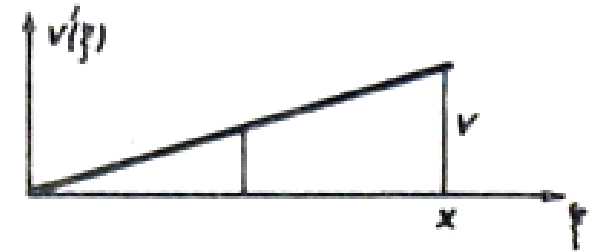


pl.: határozzuk meg egy m_r tömegű rúgóra akasztott m tömegű test rezgéseidejét, ha $m_r < m$:



rezegjen vsz.-en, pl. légpárnás asztalon $\rightarrow$ nincs súrlódás

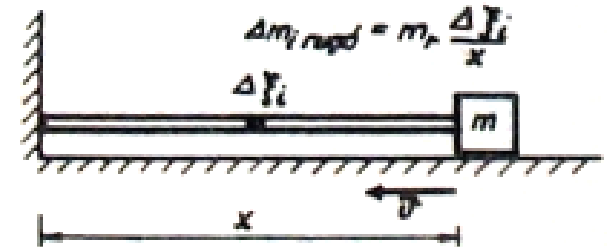
ha $m_r \ll m \rightarrow$ a rúgó deformálása kvázisztatikus folyamatnak vehető : a rúgó 2 végére ható erők majdnem egyformák $\rightarrow$ a rúgó relatív deform.-ja a teljes hossza mentén állandó és az egyes tp.-jainak az erőmentes egyensúlyi helyzettől mért kitérése a rögz. végtől való távolságukkal arányos $\forall$ pillanatban



a rögz. végtől ξ táv.-ra levő Δm_i darab sebessége :

$$\Delta m_i = m_r \cdot \frac{\Delta \xi_i}{x}$$

$$v(\xi_i) = v(x) \cdot \frac{\xi_i}{x}$$



ahol $v(x)$ a rúgó szabad végének (és a tp.-nak) a sebessége

ekkor a rúgó kin. E-ja : $E_{\text{kin,rúgó}} \approx \frac{1}{2} \sum [\Delta m_i v^2(\xi_i)] \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^x \frac{v^2(x)}{x^3} \xi^2 m_r d\xi = \frac{1}{2} \frac{m_r}{3} v^2(x)$

a rdsz. teljes kin. E-ja : $E_{\text{kin,teljes}} = E_{\text{kin,rúgó}} + E_{\text{kin,test}} = \frac{1}{2} \left(\frac{m_r}{3} + m \right) v^2(x)$

a rug. E, mivel a deformációt állandónak feltételeztük : $E_r = \frac{1}{2} kx^2$

az energia megm. T szerint a rug. E csökkenése = a kin. E növekedésével :

$$E_r(x) - E_r(x + \Delta x) = E_{\text{kin}}(x + \Delta x) - E_{\text{kin}}(x)$$

$$-kx\Delta x - \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \left(\frac{m_r}{3} + m\right)v\Delta v + \frac{1}{2}\left(\frac{m_r}{3} + m\right)\Delta v^2$$

Δt -vel osztva és $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ $-kx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{m_r}{3} + m\right)v \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$$a = -\frac{k}{\left(\frac{m_r}{3} + m\right)}x$$

ez éppen a harm. rezg.mozgás diff.egyenlete

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{m_r}{3} + m\right)}{k}}$$

a rugalmasság atomos modellje :

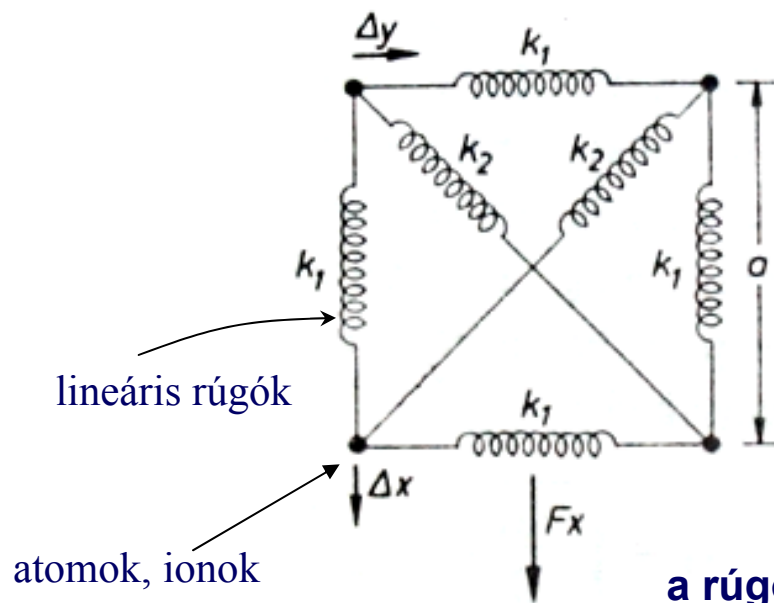
kontinuum-modell → a rugalmas test $\forall$ kis része is rug. test

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad \text{és} \quad u = \frac{dU}{dV}$$

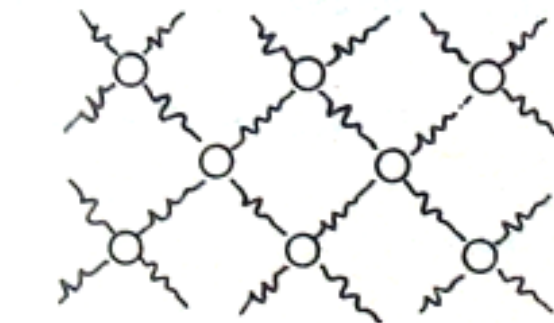
atomos szemlélet → a σ az elválasztó felület egyik oldalán levő atomok (molekulák, ionok...) által a másik oldalon levőkre kifejtett erők eredőjéből kapható, és a rug. energia az atomok közötti kölcs.hat. E

→ a legkisebb o. test, ami rugalmas,
legalább néhány atomból kell, hogy álljon

egy nagyon egyszerű ilyen modell :



a rúgók nicsenek ott !

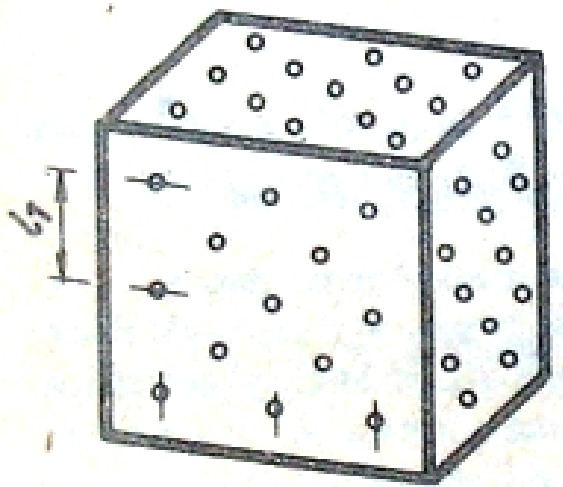


egyensúlyi helyek

E-min.!

a kristályos szilárd testek: szabályos térbeli elrendeződés → kristályrács

ha ism. E , G , μ –t $\rightarrow$ pot.-gödör falmagasságának becslése :

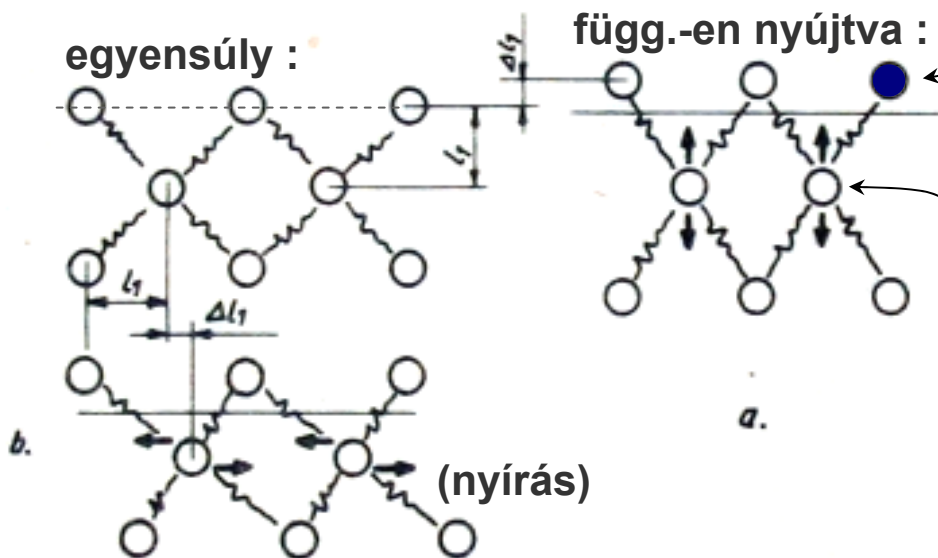


vagy ugyanaz : az egyes atomokra a szomszádok által kifejtett „rúgóerő” rúgóállandóját :

legyen a testben egységnyi hosszúságon n db. atom
 $\rightarrow n^3$ db atom tf.-egységeként

a szomszédos síkok átlagos egyensúlyi táv.-a : $\ell_1 \sim 1/n$

ha ezt egyirányú húzással terheljük $\rightarrow$ az atomok elmozdulása és az atomokra ható erők :



σ az egy atomra a sík másik oldalán levő többi által kif. összes erővel kifejezve :

$$\sigma = n^2 F_1$$

ε pedig : $\varepsilon = \frac{\Delta \ell_1}{\ell_1}$

a diff. Hooke-törv. : $\sigma = E \cdot \varepsilon$

$$n^2 F_1 = E \cdot \frac{\Delta \ell_1}{\ell_1} \approx E \cdot \Delta \ell_1 \cdot n$$

$$n^2 F_1 \approx E \cdot \Delta \ell_1 \cdot n \quad \longrightarrow \quad F_1 \approx \frac{E}{n} \cdot \Delta \ell_1 = k_1 \cdot \Delta \ell_1$$

$\xrightarrow{\hspace{1cm}}$ **fémekre : $E \approx 10^{11} \text{ N/m}^2$**
 $n^3 \approx 10^{23} \text{ atom/cm}^3 \quad \longrightarrow \quad n \approx 10^8 \text{ atom/cm}$

$$k_1 = \frac{E}{n} \approx \frac{10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{10^8 \frac{1}{\text{cm}}} = \frac{10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{10^{10} \frac{1}{\text{m}}} = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

az egy kiszemelt atom kölcs.hat.E-ja a szomszéd rétegben levő atomokkal :

$$E_{\text{pot},1} = \left(\frac{1}{2} k \cdot \Delta \ell^2 \right) = \frac{1}{2} k_1 \cdot \Delta \ell_1^2$$

ha nem deform. a testet, csak 1 atom kimozdul v.merre az egyensúlyi helyzetéből $\longrightarrow$ az egyik szomszéd sík vonzza, a másik szomszéd taszítja

$$F_{\text{eredő}} = 2k_1 \cdot \Delta \ell_1$$

a pot.-gödör egyenlete az atom virtuális elmozd.-nak fgv.-ben :

$$E_{\text{pot}}(\Delta \ell) = \frac{1}{2} (2k_1) \cdot \Delta \ell^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{n} \right) \cdot \Delta \ell^2$$

nyírásra is hasonlóan, csak $\frac{2G}{n} < \frac{2E}{n}$ rugóállandóval kell számolni

viselkedés a rugalmassági határon túl :

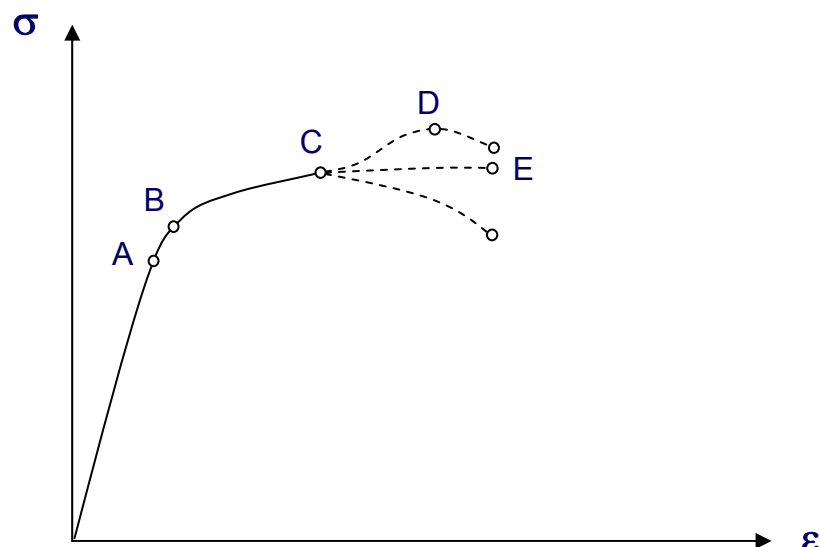
O-A szakasz : Hooke-törv. (lin.)

B : rugalmasság határa (nem lin.)

C : képlékenység

D : maximum

E : szakadás (szakítószilárdság)



A és B elég közel vannak

maradó alakvált.

képlékeny
rideg } anyagok

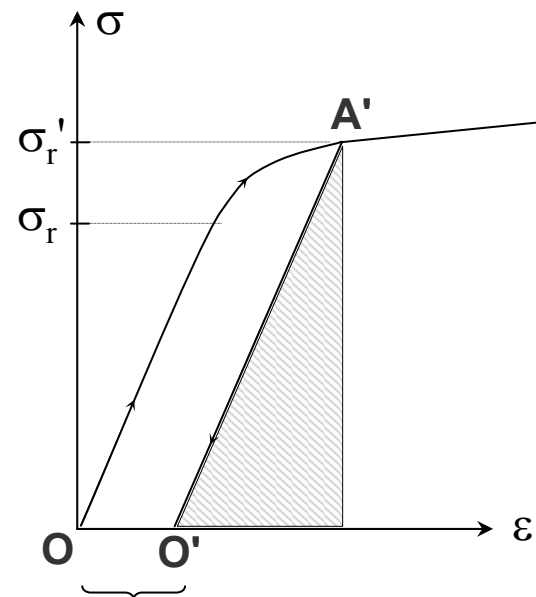
pl. : képlékeny : acél, Cu, kilagyított Cu, meleg szurok
rideg : öntöttvas, bronz, üveg, hideg szurok

képlékeny : nagy maradó alakvált.-t lehet okozni
rideg : nemsokkal σ_r fölött eltörnek (nincs maradó alakvált.)

az A' pt.-hoz tartozó teljes alakvált. = OO' maradó alakvált. +
+ egy innen induló másik rug. alakvált., az eredetitől kül. rug.
határral : $\sigma_r' > \sigma_r$! $\rightarrow$ *alakítási keményedés*

σ -t A'-n túl növelve a σ_r is nő, de csak egy darabig

$\rightarrow$ folyáshatár : adott σ elérése után ϵ akkor is nő, ha σ nem nő tovább $\rightarrow$ mint a folyadékok



maradó alakváltozás

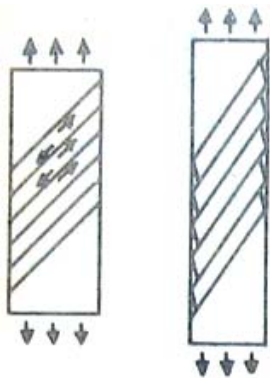
tiszta húzásnál : ált. hamarabb elszakad, mint a folyáshatár

szakadás : lokális egyenetlenség, repedés miatt → ott a
névleges σ sokkal nagyobb lehet

nyomás, hengerlés : nem tud elvékonyodni → lehet folytatni → tetsz. alakra formálható
(pl. : bogrács, lemezbögre, lemez fürdőkád, ...)

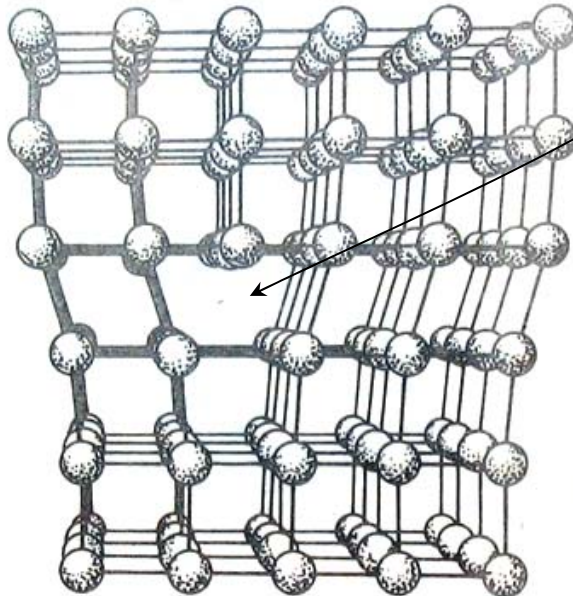
képlékeny alakvált. mechanizmusa :

eredetileg sima felület szemmel → magyarázat : **diszlokációk** (= vonalhibák) :
láthatóan lépcsős lesz
hiányzik egy vonal mentén az atomsor



V. 48. ábra

láttuk, hogy nyirófeszültség húzás esetén is keletkezik a test valamilyen keresztmetszeteiben, ennek hatására pedig a kristályrétegek egymáson elcsusz-

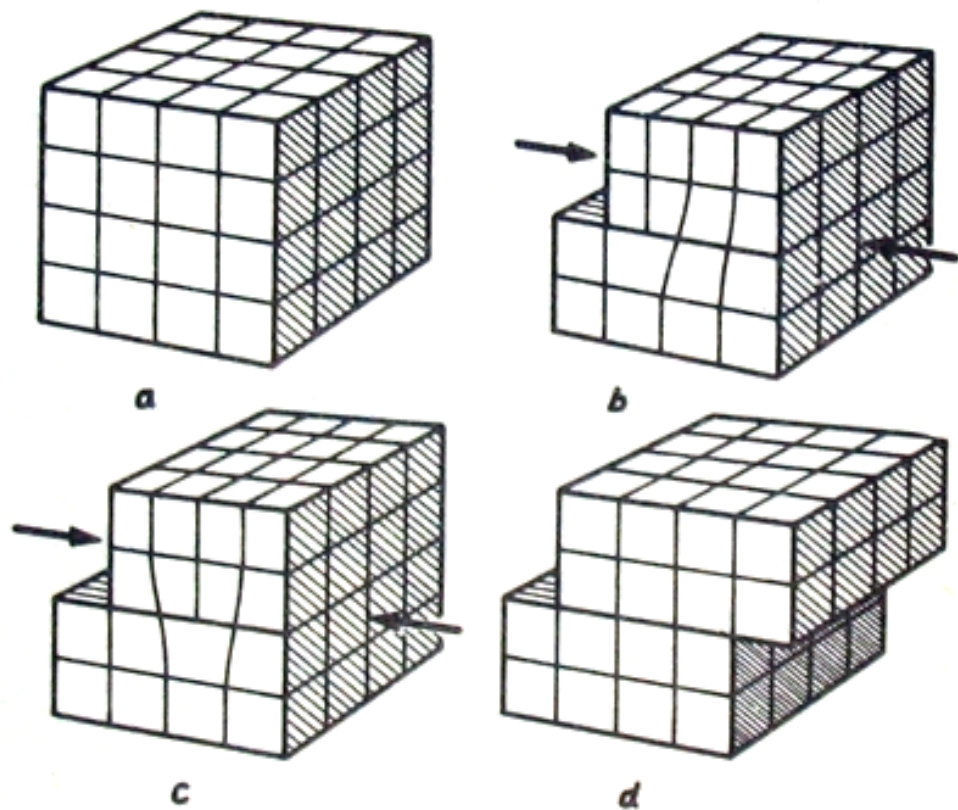


mintha egy plusz félsíkot
betolnánk 2 szomszédos sík közé



a plusz félsík „éle” a diszlokáció (= éldiszlokáció)

két szomszédos sík elcsúszása egy diszlokáció segítségével :



a szemmel látható alakváltozáshoz sok atomnyi elmozd. kell → sok diszl. kell
↓
diszl.-források

(folyt.-t ld. az ANYAGSZERKEZET c. kurzusban)

rugalmas utóhatás :

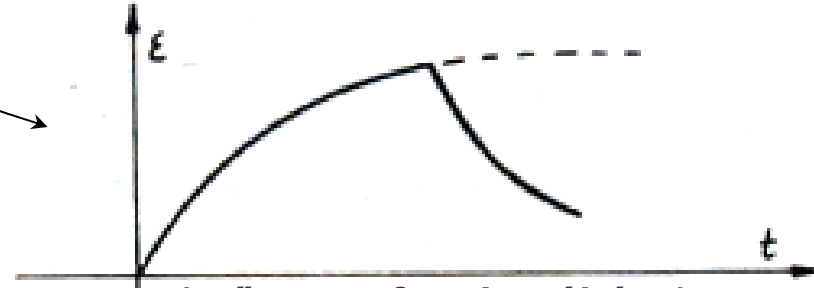
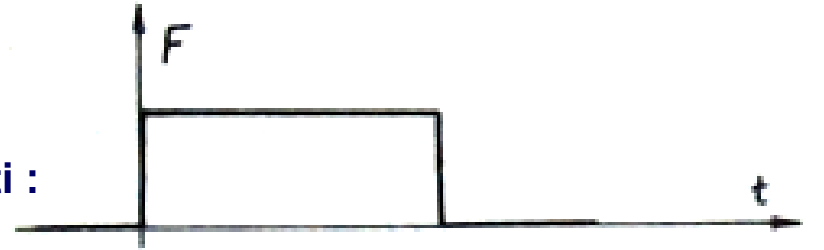
az előzőekben :

végtelen lassú deform. $\rightarrow$ alakvált. rögtön követi az erő vált.-t

de a valóságban :

ha a terhelés hirtelen nő

$\rightarrow$ az alakvált. csak késve követi :

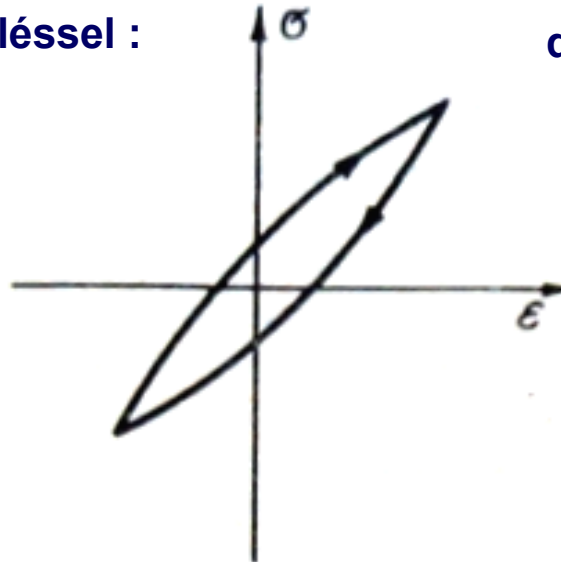


(műanyag fonal nyújtása)
de fémeknél is kimutatható

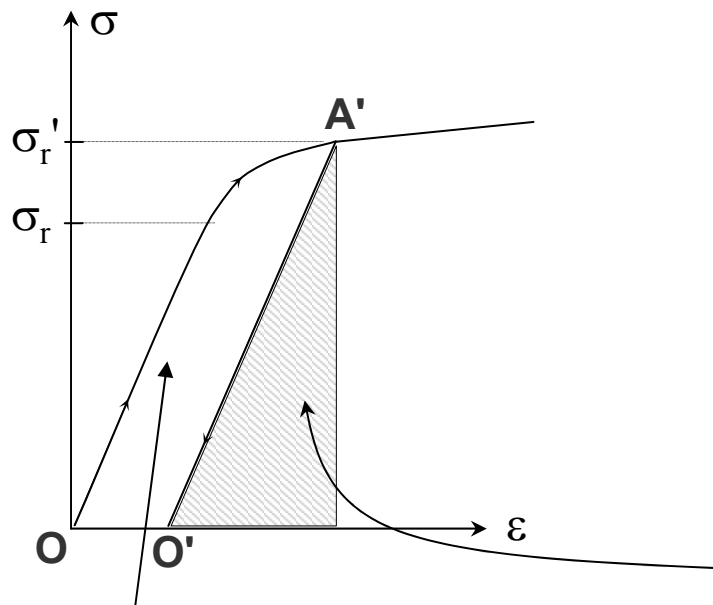
rugalmas hiszterézis :

periodikusan vált. a terhelést (pl. rúgón
rezeg egy test) $\rightarrow$ periodikusan
nyúlik - összenyomódik

a deform. nincs fázisban a terheléssel :



energiadisszipáció :



ez a terület : a maradó alakvált.
eléréséhez szüks. munka
(mech.-i munkavégzés szempontjából
elveszett)

ha nincs képl. alakvált. :
deformáció $\longleftrightarrow$ munkavégzés

$\updownarrow$
rug. energia

ez a terület : az a munka, amit a test végezni tud,
amíg visszaalakul „eredeti” alakjára

energiavesztés van a hiszterézis miatt is : a hurok területe az elveszített energia

∇ rezgés csillapodó rezgés lesz
(ld. később...)

energiavesztés $\longrightarrow$ „sérül” az energiamegmaradás ?
az atomok rendezetlen rezgéseinek energiája tárolja ezt az energiát

konzervatív }
disszipatív } kölcsönhatások

$\downarrow$
melegszik

ütközések :

 $\left\{ \begin{array}{l} \text{tökéletesen rugalmas} \\ \text{tökéletesen rugalmatlan} \end{array} \right\}$ ideális határesetek

a valóság a kettő között van

$\left. \begin{array}{l} \text{lendület megmaradás} \\ \text{perdület megm.} \end{array} \right\}$ teljesül

ütközés = olyan, rövid idő alatt lejátszódó foly., melyben az ütköző testek közötti kölcsönhatási erő csak egy véges távolságon belül $\neq 0$, és a testek ezen táv.-on kívülről indultak

pl. : rugalmas golyók (acél, elefántcsont !!!), kocsik ütközése, ...

 biliárdgolyó

csak akkor lépnek kölcs.h.-ba, ha gyakorlatilag összeérnek (makroszkópiusan összeérnek)

de ütközés az atomi folyamatok (magreakciók, Rutherford-szórás) jelentős része is

ütk.-t leírni teljesen pontosan akkor lehetne, ha :

pillanatról-pillanatra ismerjük $\forall$ test helyzetét, alakját, méretét, a tömegpontjaik seb.-t ehhez viszont ismerni kellene a rájuk ható külső és belső erők erőtv.-it



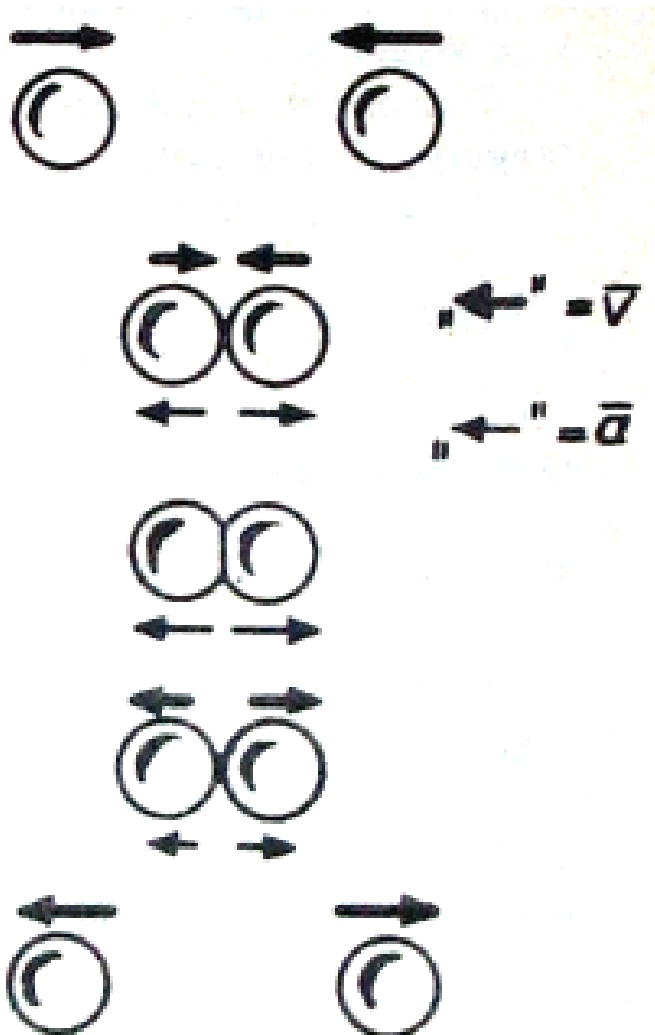
lehetetlen

de a megmaradási törvényekkel is sok fontos dolgot meg lehet állapítani

energiamegm. $\longleftrightarrow$ rugalmas ütk.

↖ az ütköző testek mozgási + forgási + belső energiái, + a két test közötti pot.E

az ütközés folyamata :



ha tökéletesen rug. ütk. $\longrightarrow$ mozgási E megm.

ha tökéletesen rugtl. $\longrightarrow$ összetapadnak

$\downarrow$
 ütk. után $v_{\text{közös}}$

reális esetekben :

a kezdeti összes E egy része disszipálódik

tömegpontok rugalmas ütközése :

**egyenesvonalú
nem egyenesvonalú** } **ütközések**

energia- és impulzusmegmaradás érv.

egyenesvonalú ütk. : ha egyforma tömegűek



a tömegpontok sebességet cserélnek

ha az egyik tömege $\gg$ mint a másik tömege



a kisebbik visszapattan és a másik nem mozdul

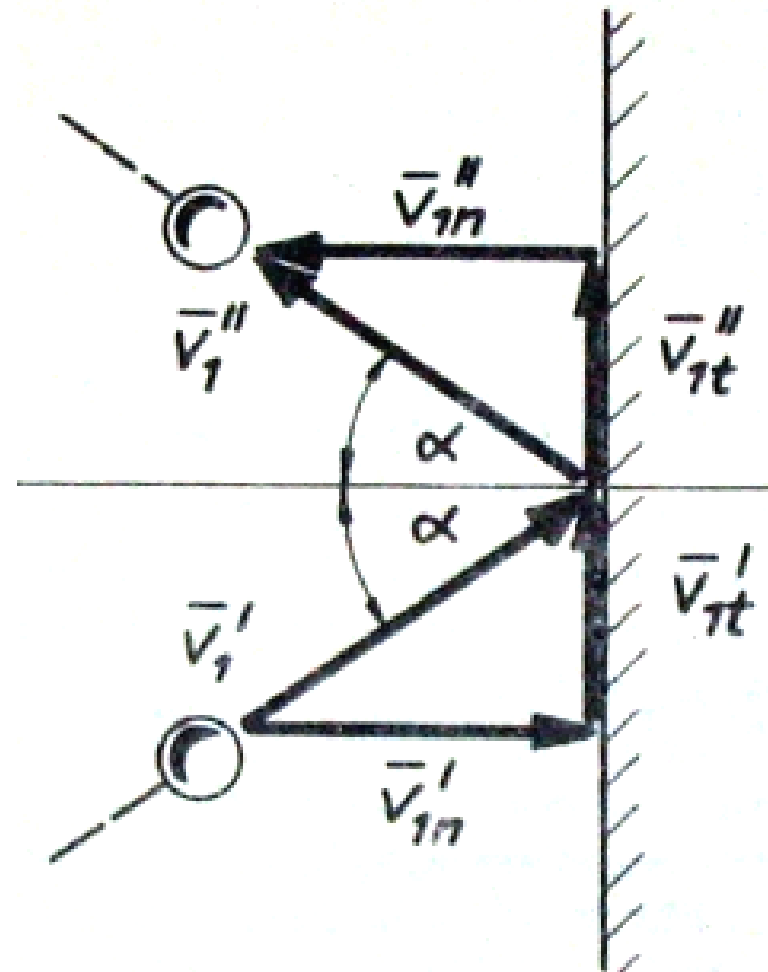
tömegpontok rugalmatlan ütközése :

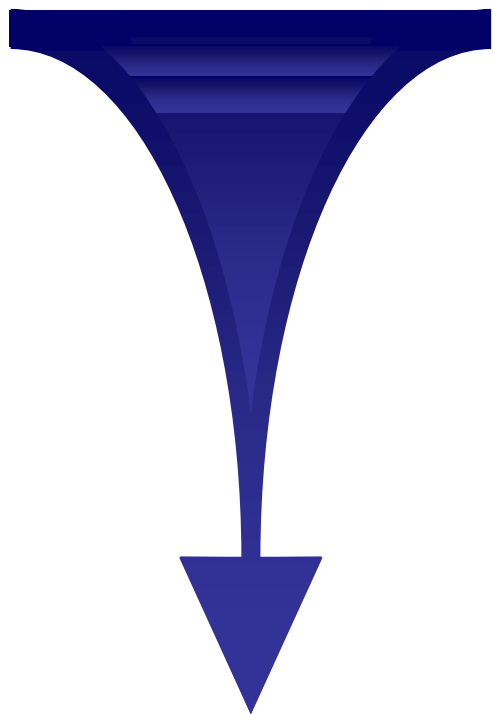
csak akkor tudunk számolni, ha ismert az energiadisszipáció mértéke



tökéletesen rugtl. esetet lehet vizsgálni : összetapadnak és közös sebességgel mennek tovább

**pl.: homokzsákba lőtt puskagolyó...
kalapáccsal ütött $\rightarrow$ alakított vasdarab**





FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK STATIKÁJA ÉS ÁRAMLÁSA :

folyadékok :

állandó térf., nem állandó alak, a részecskék „gördülhetnek” egymáson → folyik
pl.: csapágygolyók egy edényben; homok, liszt, cement, ... is folyik



nyugvó folyadékban nincsenek érintőleges (nyíró) feszültségek !
de pl. méz, olaj, szurok,... - ban észlelhető, **ha folyik**



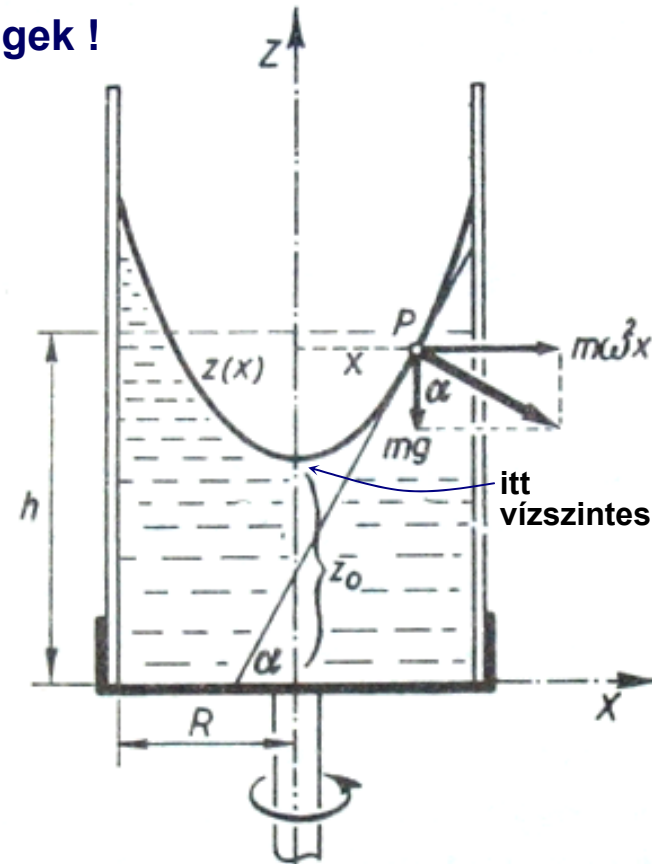
belső surlódás : az egymáson elmozduló rétegek közötti surlódás

ideális folyadék : nincs belső surlódás

inkompresszibilis = összenyomhatatlan

nyugvó foly. szabad felszíne mindenütt merőleges
a külső erők eredőjére
vagy pl. a Földet borító vizek felülete is gömb alakú

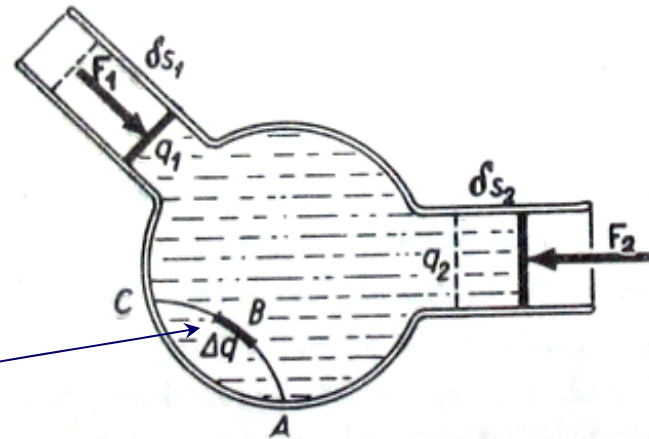
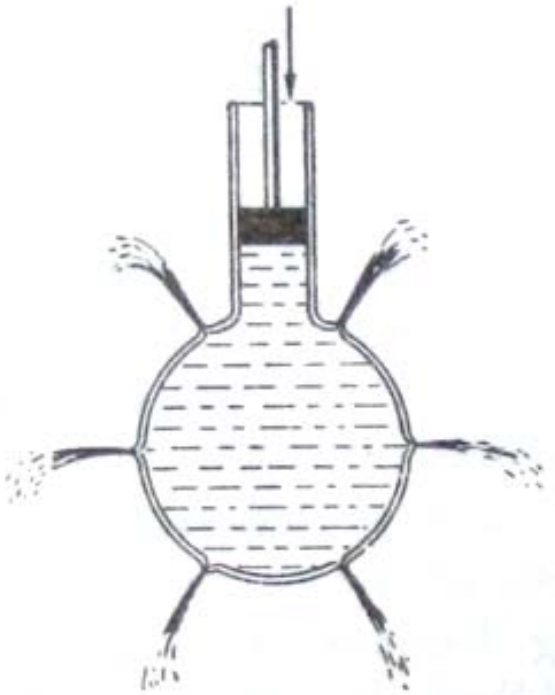
ha az eredő (F) nem lenne $\perp$ a felszínre → F-nek lenne a felszínnel $\parallel$ komponense is → a felületen levő folyadék-részecskék az F irányában elmozdulnának = nem lenne nyugalomban



forgási paraboloid lesz a felület

nyomás nyugvó folyadékban, hidrosztatikai nyomás :

Kísérlet :



összenyomhatatlan $\rightarrow \delta s_1 \cdot q_1 = \delta s_2 \cdot q_2$
és : $F_1 \cdot \delta s_1 = F_2 \cdot \delta s_2$

$$\frac{F_1}{q_1} = \frac{F_2}{q_2} \longleftrightarrow p_1 = p_2$$

$$\left(p = \frac{F}{A} \right)$$

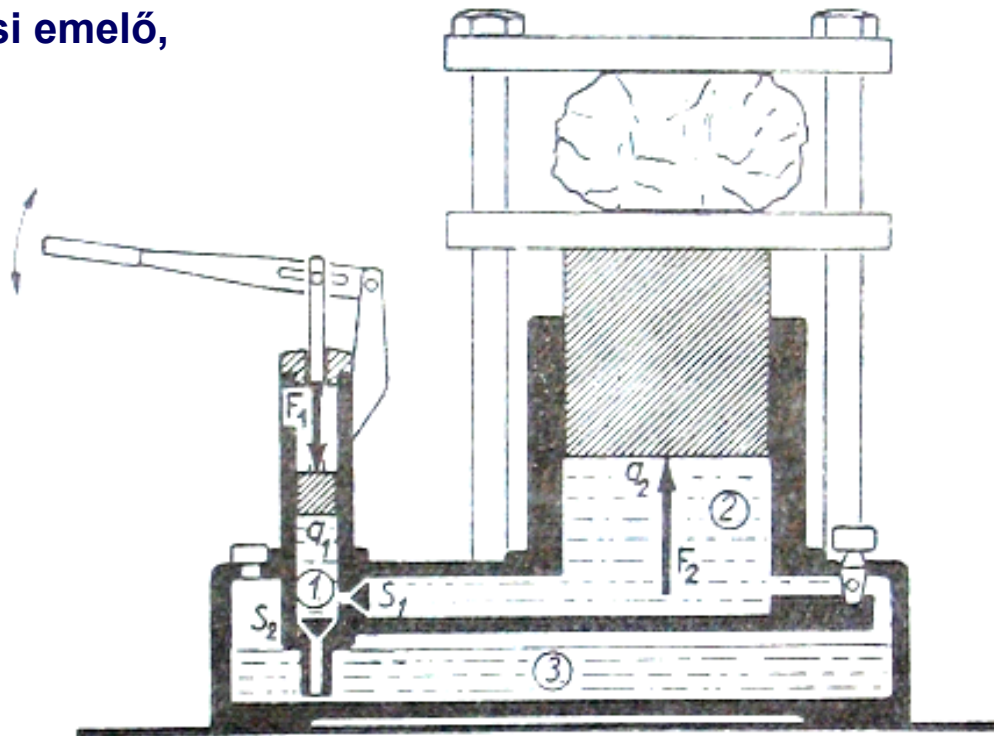
a Δq felület-darabka (bárhol is vesszük fel a foly. belsejében és ∇ irányítással) egyensúlyban van



a nyomás egyenletesen terjed és izotróp, vagyis

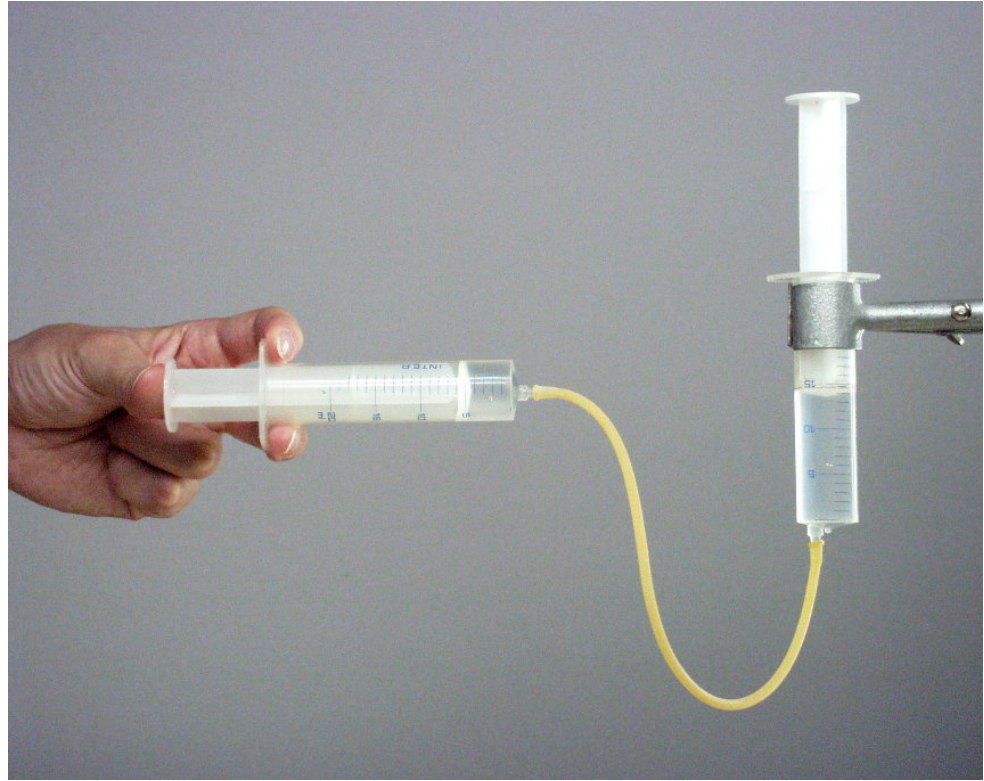
Pascal törvénye : a súlytalannak képzelt nyugvó folyadék belsejében és határfelületén a nyomás mindenhol ugyanakkora, és független a tekintetbe vett felületelem irányításától (1659)

pl. : hidraulikus sajtó/sajtoló/prés; gépkocsi emelő,
hidraulikus fék, stb...



Kísérlet :

hidraulika modellezése



ha a folyadék súlyát is figyelembe vesszük: **hidrosztatikai nyomás:**

a h magasságú foly.-oszlop a q felületen $F = mg = \rho Vg = \rho gh \cdot q$ erővel hat

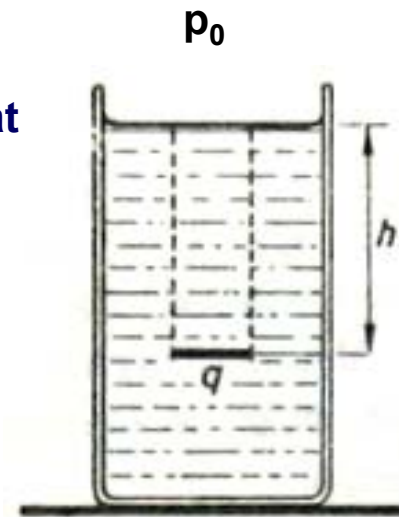
$$p = \frac{F}{q} = \rho gh$$

pl. : víz : 10 m mélyen 1 bar nyomás

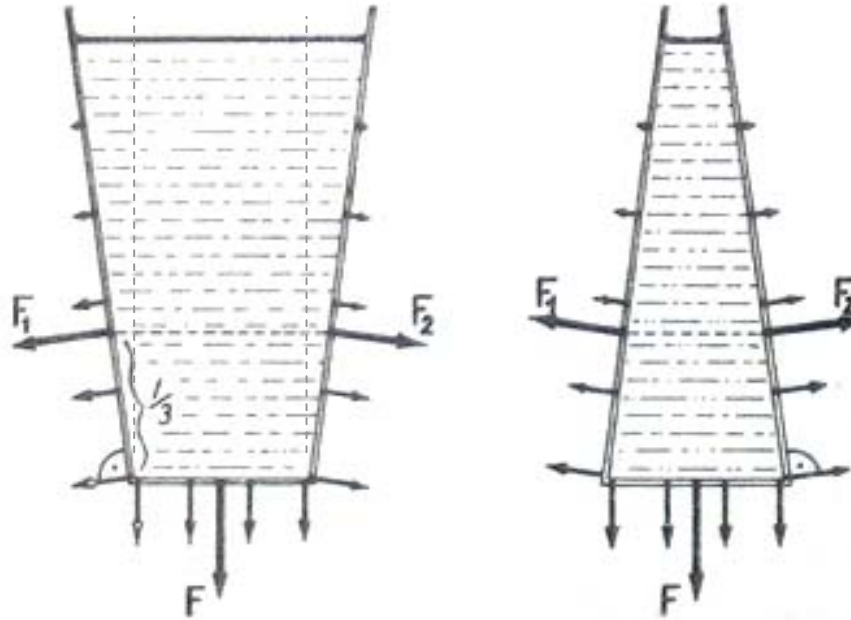
ha p_0 külső nyomás (pl. légnyomás) is van

$$\longrightarrow \mathbf{p = p_0 + \rho gh}$$

gázban is !!!



kísérlet : **hidrosztatikai paradoxon** : a fenéknomás fgtl. az edény alakjától !!!



oldalnyomás lefelé lin. nő



nyomásközéppont a magasság harmadánál van

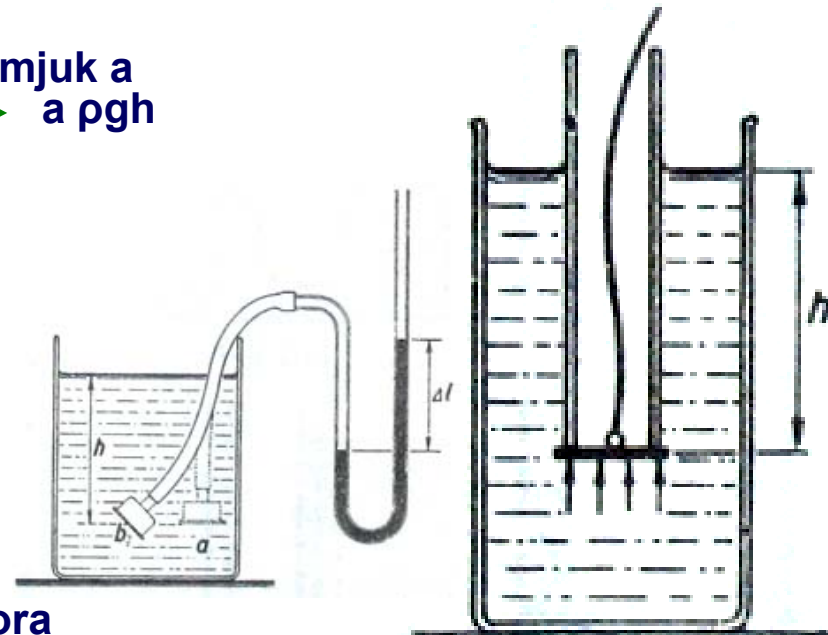
kísérlet :

pl. : üvegcsövet lezárunk egy üveglappal és benyomjuk a víz alá → az üveglap nem fog leesni → a p_{gh} nyomás felfelé is hat !!!
(de ha a csőbe is töltünk vizet → leesik)

kísérlet :

kis keresztmetszetű csövet (üvegpalackot, poharat) megtöltünk vízzel és papírlappal lefedve szájával lefele fordítjuk → papír a helyén marad + víz nem folyik ki

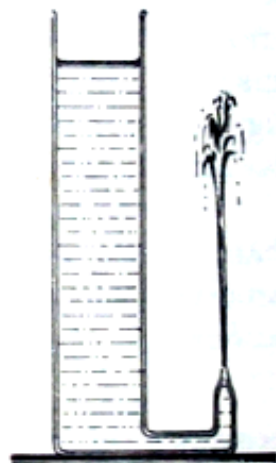
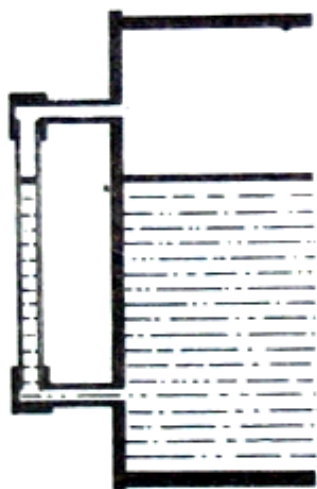
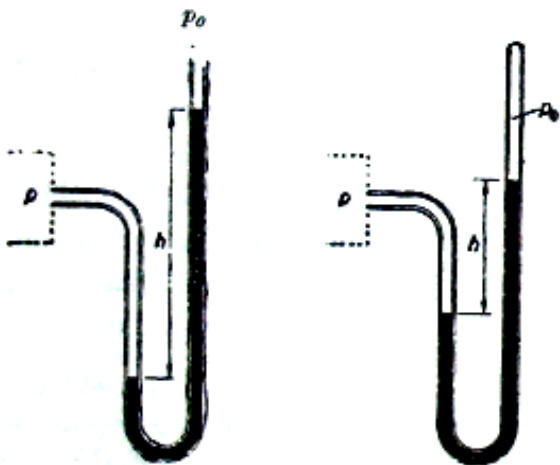
adott mélységben a nyomás ∇ irányban ugyanakkora



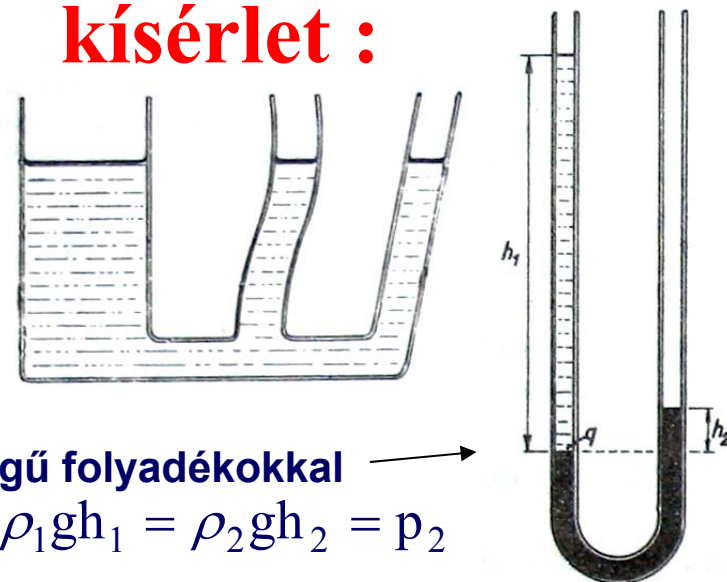
közlekedőedény :

egyensúlyban minden ágban egyenlő szinten van a folyadék

pl. : ezen alapszik az U-csöves folyadékmanométer
(főleg gázok nyomásának mérésére)
vízvezetékek, fűtésrendszerek, szökőkutak,
artézi kutak, víztorony

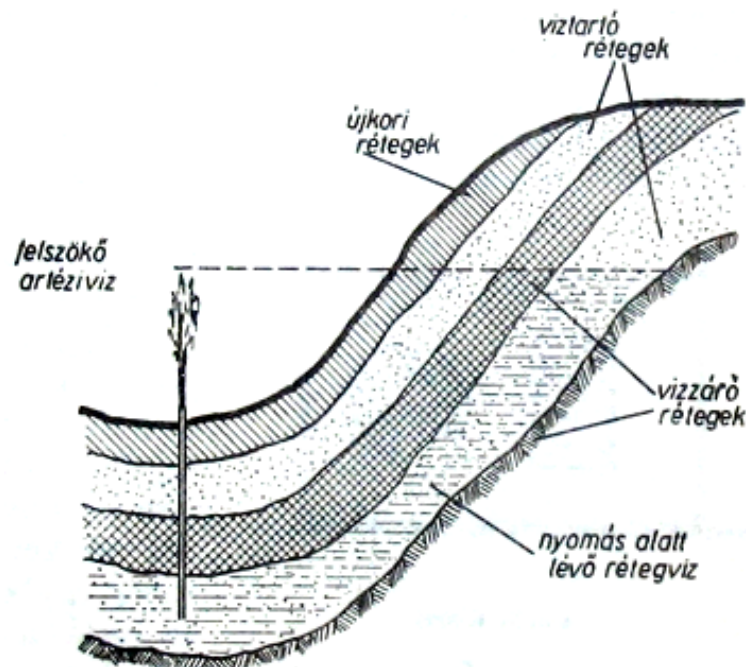


kísérlet :

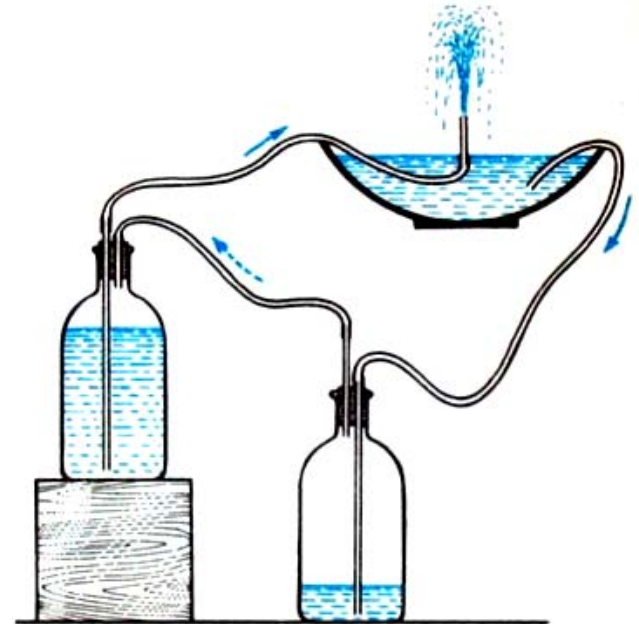
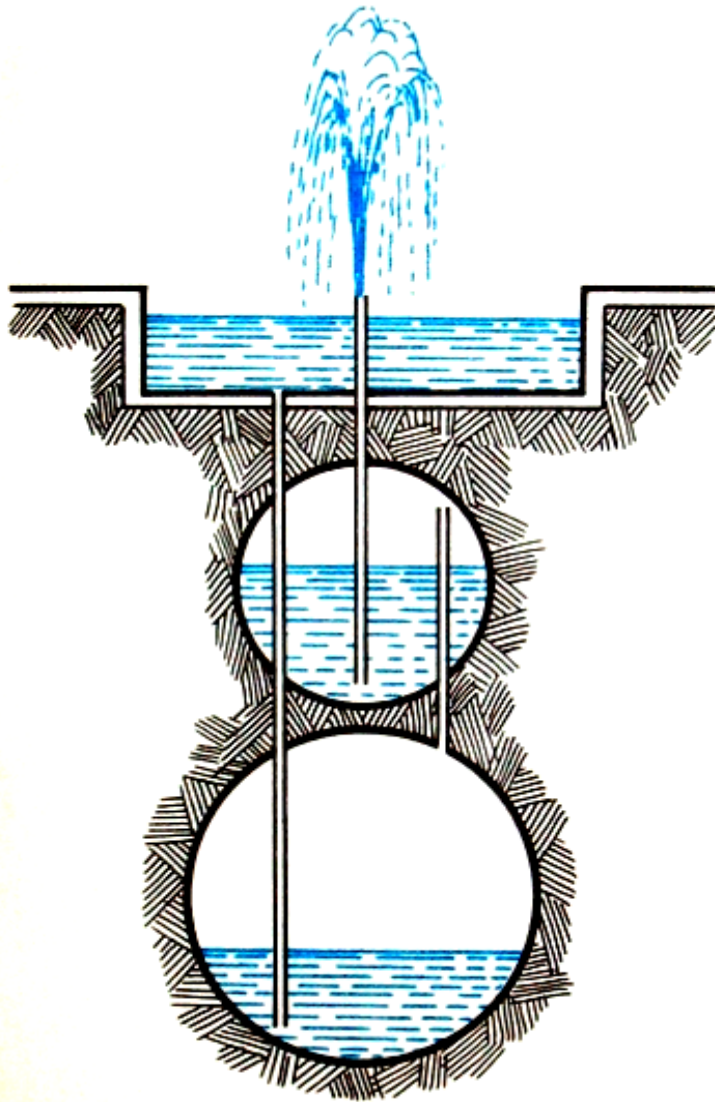


kül. sűrűségű folyadékokkal

$$p_1 = \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 = p_2$$



pl. : szökőkút :



Héron kútja

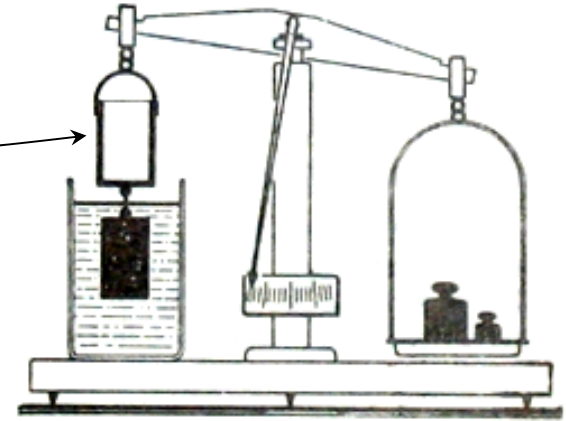
a hidrosztatikai felhajtóerő :

Arkhimédész törv.: minden folyadékba (gázba) merülő testre felhajtóerő hat – a test látszólag súlyvesztéseget szenved – melynek nagysága egyenlő a test által kiszorított folyadék (gáz) súlyával (i.e. ≈ 250):

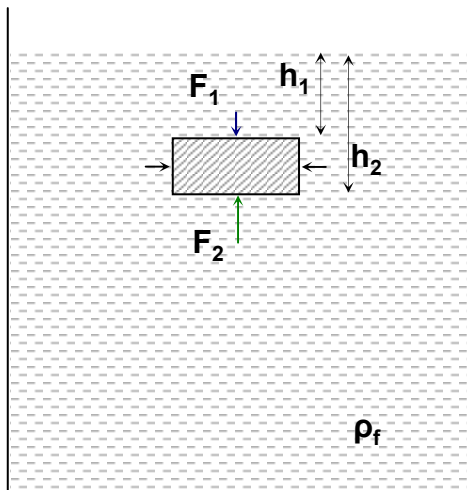
$$F_f = \rho_f \cdot V \cdot g$$

versben v. dalban :
„minden vízbe mártott test
a súlyából annyit vesz,
amennyi az általa
kiszorított víz súlya”

ha ezt megtöltjük vízzel
→ újra egyensúly lesz



(laborban Mohr-Westphal mérleg „hasznos”)



a bemerülő test egyensúlyban van:

$$F_{\text{eredő}} = F_2 - F_1 = \rho_f g h_2 A - \rho_f g h_1 A = \rho_f g A (h_2 - h_1) = \rho_f g h A = \rho_f V_{\text{test}} g$$

a kiszorított foly. tf.-a

a kiszorított foly. súlya

$$F_f = \rho_f \cdot V_{\text{test}} \cdot g$$

∀ foly.-ba v. gázba merülő testre !

∀ alakú testre is érv. !!!

úszás lebegés lesüllyedés

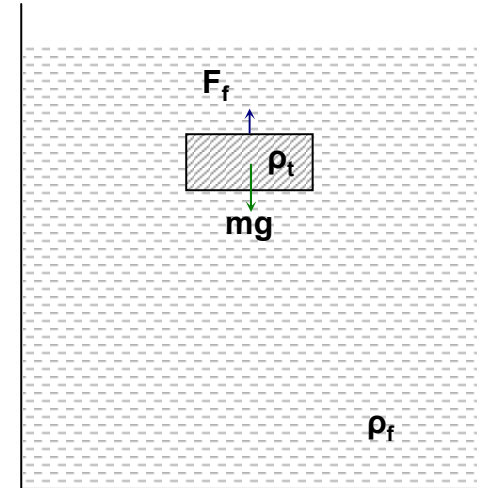
a folyadék és a bemerülő test sűrűségeinek viszonyától függ :

hajó, jégtábla, tutaj, stb...
a hal pl. nem úszik, hanem lebeg !

$$\begin{aligned} F_{\text{eredő}} &= F_f - mg = \\ &= \rho_f Vg - \rho_t Vg = \\ &= (\rho_f - \rho_t)Vg \quad \Leftrightarrow 0 \end{aligned}$$

úszás lebegés lesüllyedés

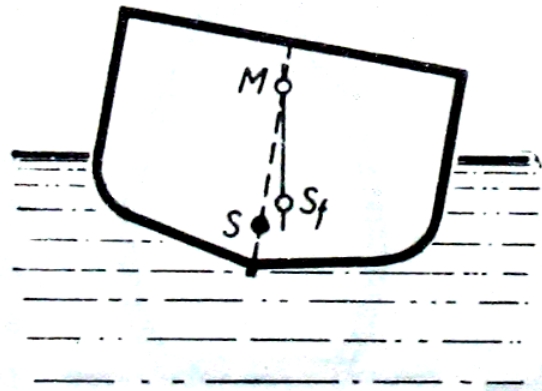
$\rho_f > \rho_t$, de ekkor a bemerülő tf. $< V$!
 $\rho_f = \rho_t$
 $\rho_f < \rho_t$



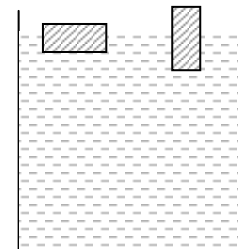
az úszó test **átlagsűrűsége** kell !!! → vas hajó is fennmarad a vízen

pl. : $\rho_{\text{jég}} \approx 0,9\rho_{\text{víz}}$ → a jéghegynak csak kb. 10%-a látszik ki

az úszás stabilitása :



$F_f = mg$; és F_f és mg ne fejtsen ki forgatónyomatékokat az úszó testre
az mg támadáspnt.-ja a súlypt. (S), az F_f támadáspnt.-ja pedig a kiszorított foly. súlypt.-ja (S_f)

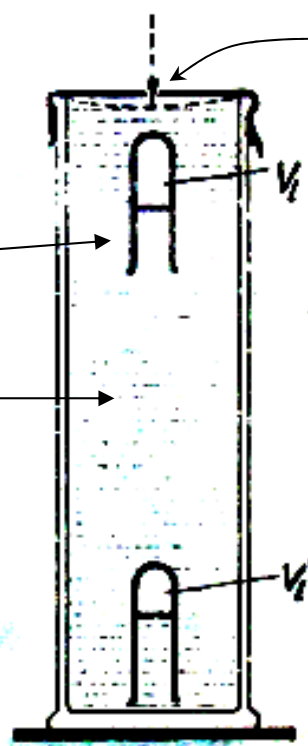


stabil, instabil, metastabil helyzetek :

kísérlet : Cartesius-féle bűvár :

kémcső

víz



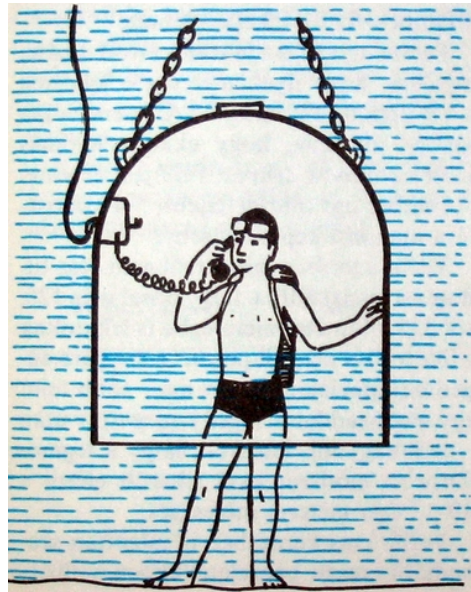
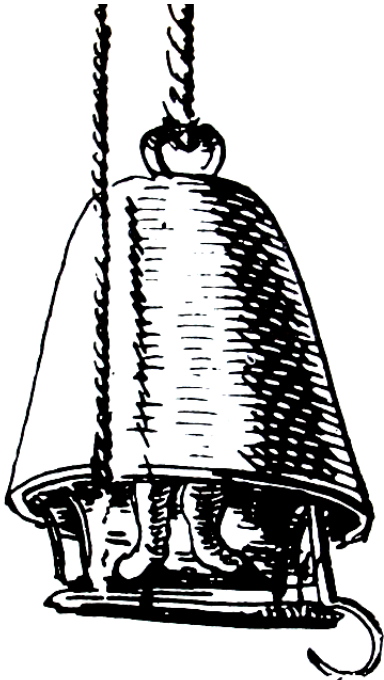
benyomjuk/összenyomjuk

a víz benyomódik a kémcsőbe

benne kisebb tf.-ú levegő → átlagsűrűség csökken

lesüllyed

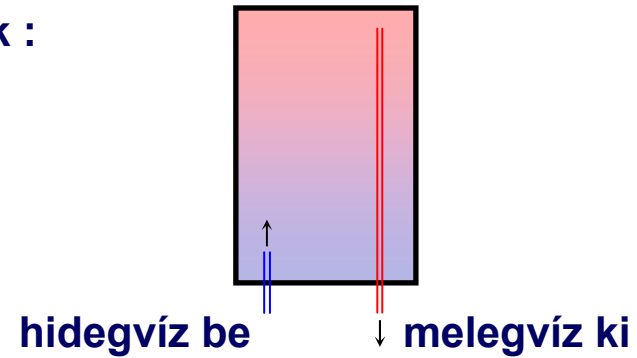
pl. : bűvárharang :



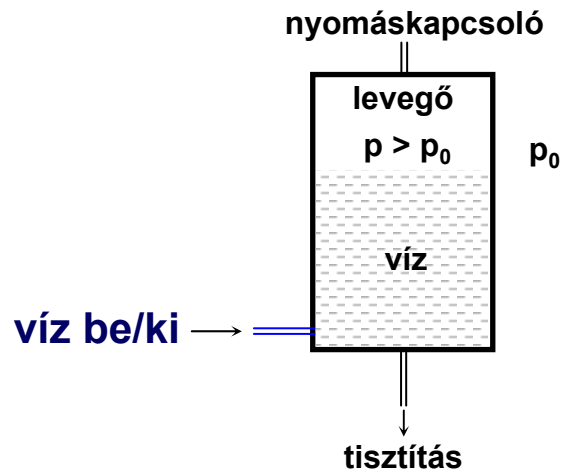
tehát : a kisebb sűrűségű test (anyag) felfelé emelkedik a folyadékban



pl. : bojler tartályban a melegvíz felülre emelkedik :



pl. : hidrofor (házi vízmű)



térfogatmeghatározás, sűrűségmérés :

homogén anyag $\rho = \frac{m}{V}$

inhomogén anyag $\rho = \frac{dm}{dV} \approx \frac{\Delta m}{\Delta V}$

ρ meghat.-hoz tömeg- és térf.-meghatározás kell

↓
mérleg

↓
mérés vagy számolás

térfogatomérés :

piknométer :

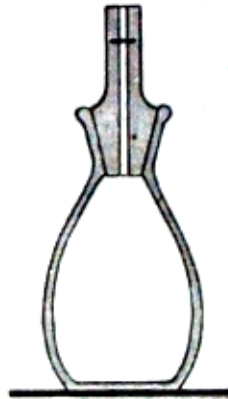
ismert sűrűségű folyadék a víz :

$$\rho_{\text{víz}}(4^\circ\text{C}) = 0,999\,972\text{ g/cm}^3 \approx 1\text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{\text{víz}}(20^\circ\text{C}) = 0,998\,204\text{ g/cm}^3$$

ezzel töltve az edényt + tömegmérés

↓
ismeretlen V meghatározható

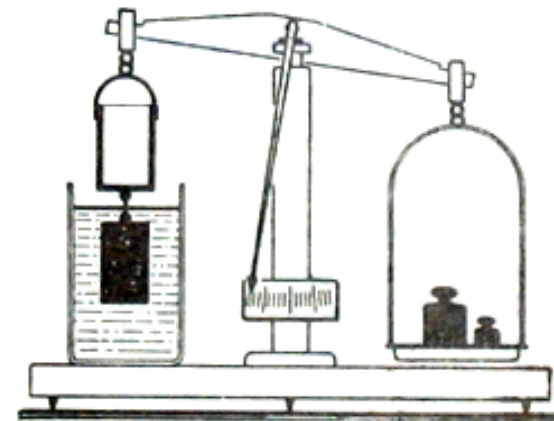


a térf. ismert

szilárd testek sűrűségének mérése:

- hidrosztatikai mérleg : kétkarú mérleg egyik karján levő mérendő testet ism. ρ_0 folyadékba merül, a súlyvesztéseget mérjük

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{m - m'}{\rho_0}} = \frac{m}{m - m'} \rho_0$$



- Jolly-mérleg :

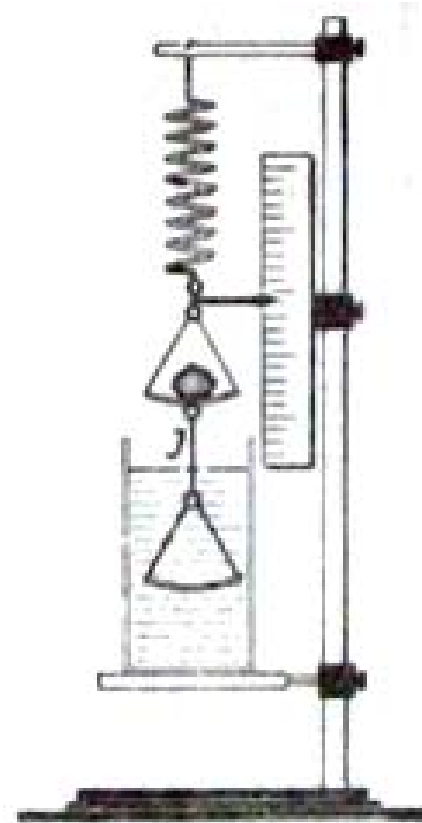
rúgós erőmérővel mérjük egy test súlyát levegőben (felső serpenyőben), leolvassuk a súlyával arányos h megnyúlást, majd folyadékba merítve (alsó serpenyő) a h' megnyúlást, a különbségből a sűrűség meghatározható

$$\rho = \frac{h}{h - h'} \rho_0$$

- piknométerrel :

kicsi darabokból álló anyagot mérhetünk, mérjük a szilárd test tömegét (m_t), a vízzel tele piknométer töm.-t (m_{pf}), majd a testet betesszük a pm.-be, kiszorít vmennyi folyadékot és így a tömege m_{pft} , a test sűrűsége

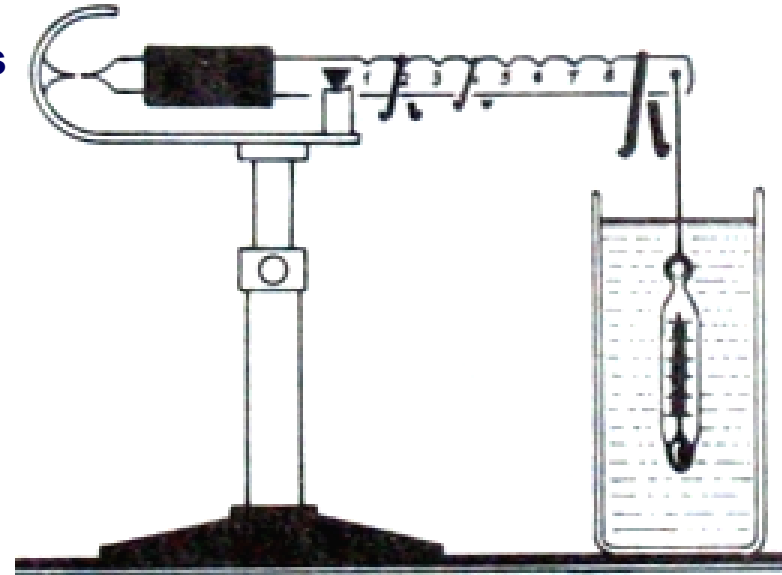
$$\rho = \frac{m}{m + m_{pf} - m_{pft}} \rho_0$$



folyadékok sűrűségének mérése:

- hidrosztatikai mérleggel : hasonlóan fentebbihez ...
- piknométerrel : hasonlóan fentebbihez ...
- Mohr-westphal mérleggel: a víz sűrűségéhez (ρ_0)
viszonyított relatív
sűrűséget mérjük : a ρ és
a ρ_0 sűrűségű
folyadékokban ható
felhajtóerők aránya

$$\frac{F}{F_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$$



- aerométerrel : (pl. alkohol-, bor fokoló)

reális folyadékok: összenyomhatók, de a kompresszibilitás nagyon kicsi
van súlya
van belső súrlódás

kohézió, adhézió :

kis összenyomhatóság → a molek.-k között taszítás van

de vonzóerők (összetartó erők = **kohéziós erők**) is vannak :

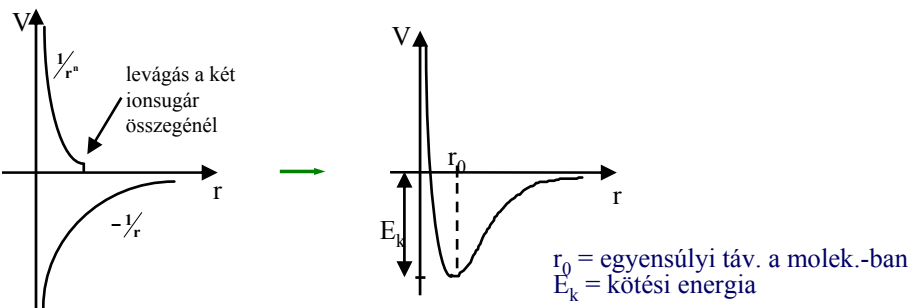
tiszta üveglapot fektetünk vízfelszínre és próbáljuk felemelni → erőhatás kell hozzá → a foly.-nak is van szakítószilárdsága
(a leszakított üveglap vizes, vagyis nem az üveget szakítottuk le, hanem két szomszédos vízréteget választottunk el)

ha az üveglapot pl. Hg-ról választjuk le, akkor is erőhatás kell, de az üveg száraz marad, vagyis most az üveg-Hg közti összetartó erőket kell legyőzni → **adhéziós erő**

↓
ragasztás („adhesive”)
toll
ceruza

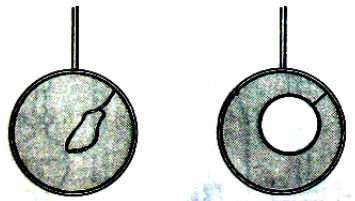
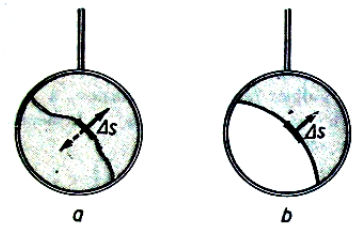
víz nedvesíti az üveget → a vízmolek.- közötti erők kisebbek mint a víz-üveg adh.erők
Hg nem nedv. üveget → a Hg molek.-k közti koh.erők nagyobbak, mint a víz-Hg közti adh. erők

molekulák között ható erők = van der Waals-erők

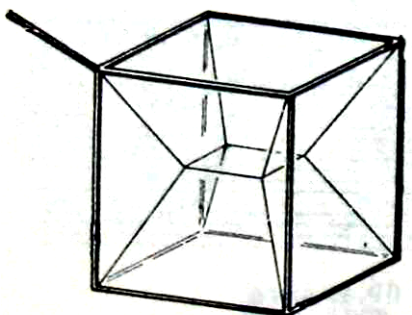
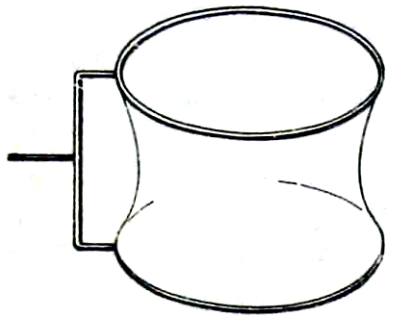


felületi feszültség, kapillaritás :

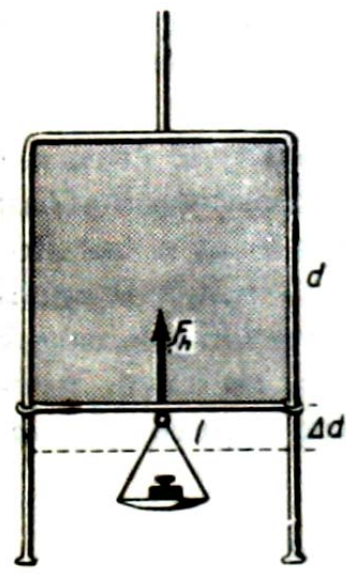
Id. oktatófilm



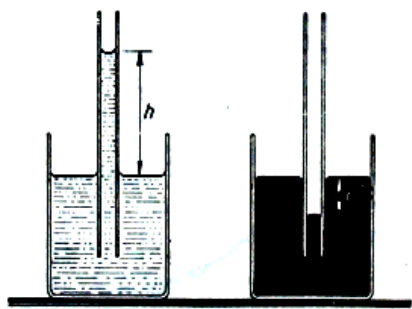
minimális felületek:



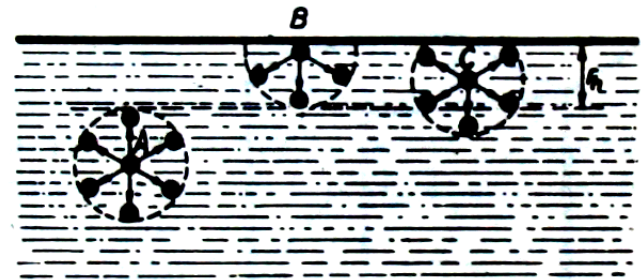
felületi fesz.:



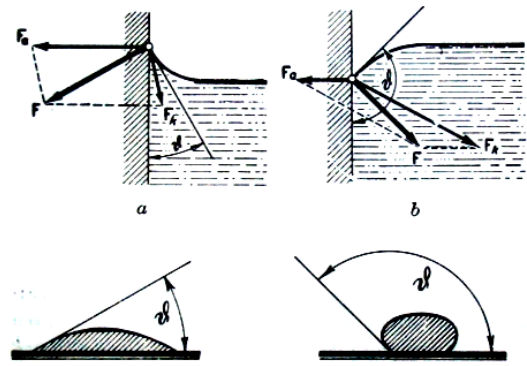
kapilláris emelkedés:



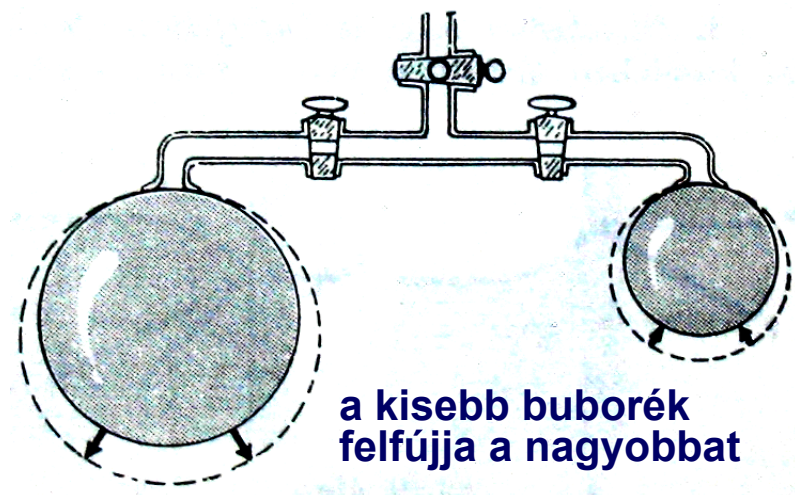
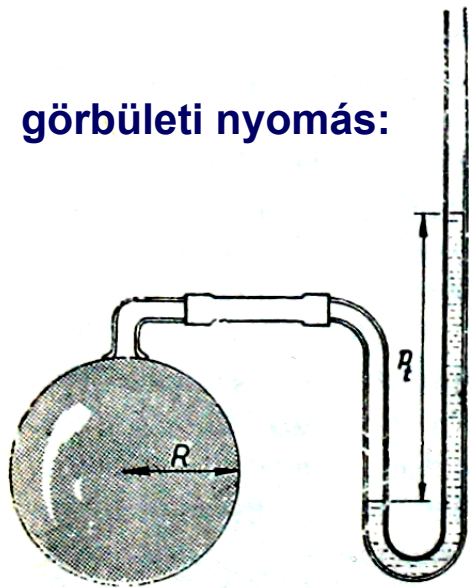
felület:



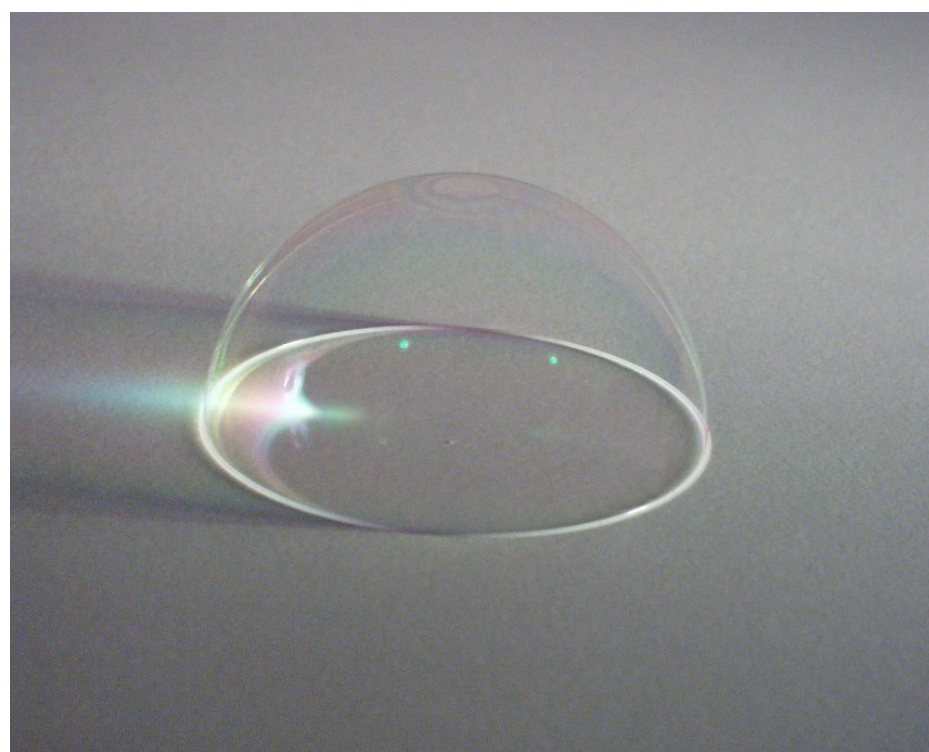
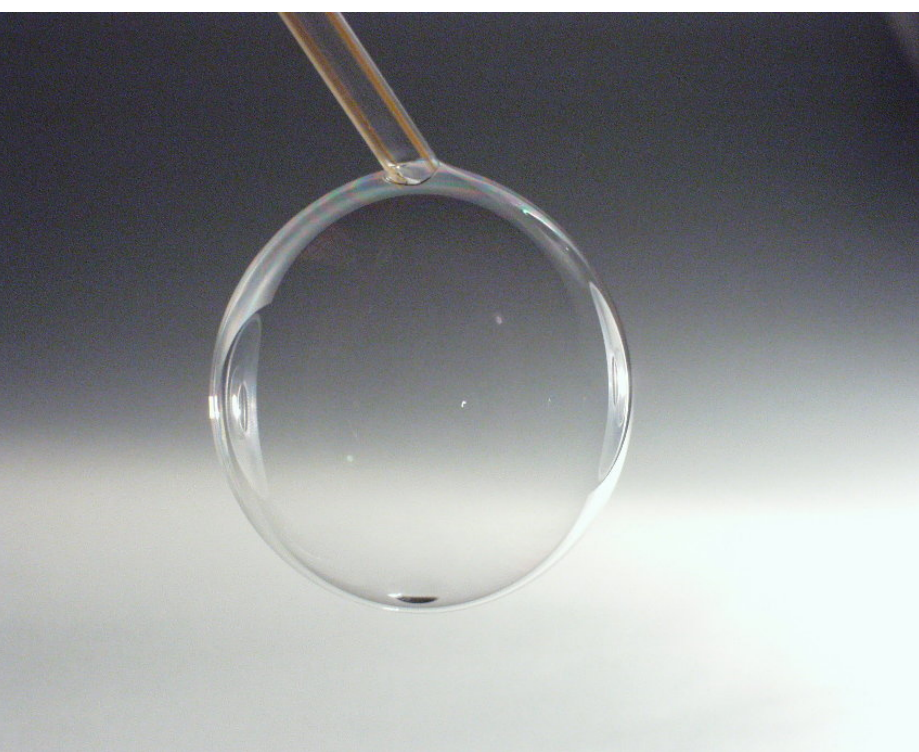
illeszkedési szög:



görbületi nyomás:



a kisebb buborék felfújja a nagyobbat



hajszálcsovesség → { ceruzát ki lehet rádiózni, tollat nem lehet
ruha, papír,... felissza a vizet
talajnedvesség

golyóstoll, grafitceruza, filctoll





nyugvó gázok mechanikája :

nincs szabad felszín, összenyomható, sűrűsége sokkal kisebb mint a foly.-é (pl. levegő $\sim 1.2-1.3 \text{ kg/m}^3$)

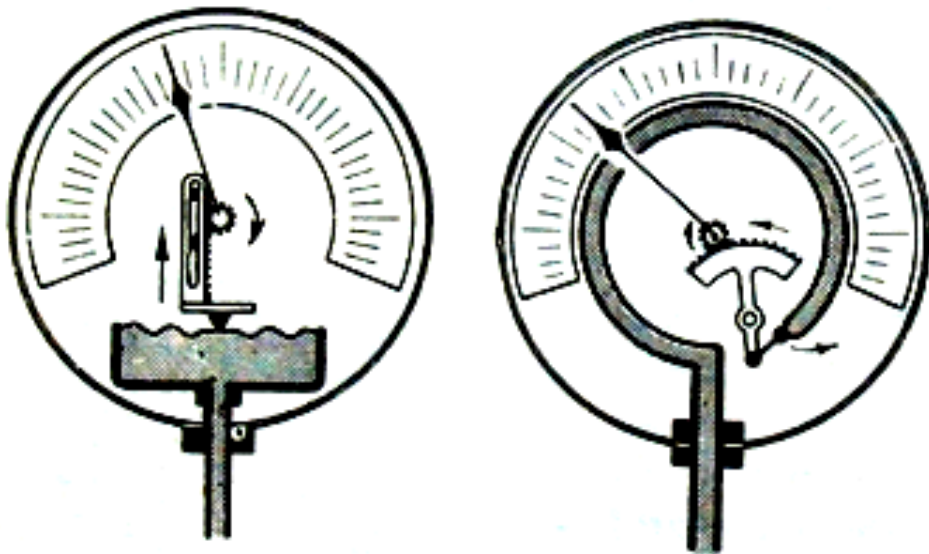
DE : a folyadékoknál megismert törv.-ek nagyrészt érvényesek

- Pascal-törv.
- van légnyomás (Torrichelli, 1643 : 1m hosszú üvegcső színültig töltve Hg-al és fejjel lefele Hg-al teli edénybe tenni, kb 76 cm magas Hg-oszlop marad a csőben)
(később Otto von Guericke, 1654 : „Magdeburgi féltekék” = 42 cm átmérőjű félgömbök + 4-4 ló  nem bírták széthúzni)

kísérlet : Magdeburgi féltekék
pezsgősüveg + celofánhártya

- felhajtóerő (Arkhimédész)

légnyomás mérése:
barométer
(manométer)





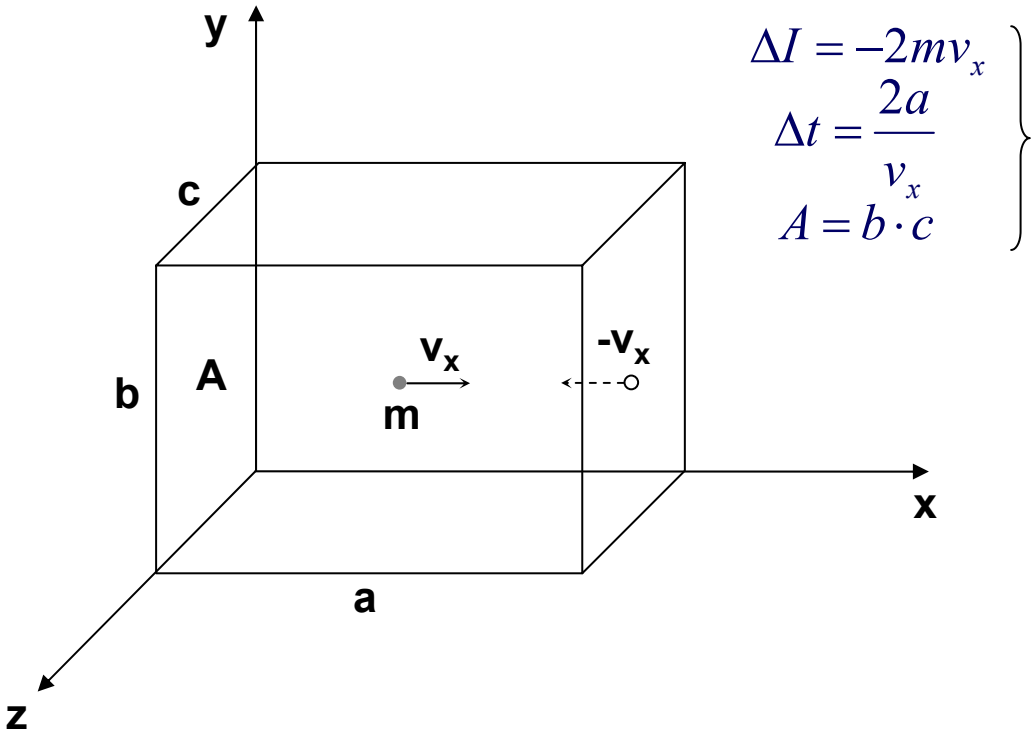
gázok nyomása és térfogata közötti összefüggés : Boyle-Mariotte-törv. :

(1662)

állandó hőmérsékleten, állandó tömegű gázra : $p \cdot V = \text{állandó}$

$\rho = \frac{m}{V}$ $\frac{p}{\rho}$ is állandó

molekuláris magyarázat :



$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{-2mv_x}{\frac{2a}{v_x}} = -\frac{mv_x^2}{a}$$
$$p = \frac{F}{A} = \frac{mv_x^2}{a \cdot A} = \frac{mv_x^2}{a \cdot b \cdot c} = \frac{mv_x^2}{V}$$

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$$

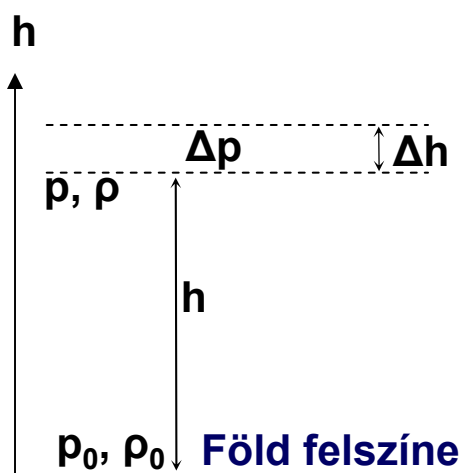
$$p = \frac{1}{3} \frac{mv^2}{V} \cdot N$$

$$p \cdot V = \frac{1}{3} N \cdot mv^2 = Boyle - Mariotte$$

légnyomás :

$$p = 760 \cdot 10^{-3} m \cdot 13,6 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} = 1,013 \cdot 10^5 Pa$$

barometrikus magasságformula :
(a légnyomás magasságfüggése)


$$\left. \begin{array}{l} \Delta p = -\rho \cdot g \cdot \Delta h \\ \Delta h \rightarrow 0 \end{array} \right\} \quad dp = -\rho \cdot g \cdot dh \quad \text{de :} \quad \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p}{\rho}$$
$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot p \cdot g \cdot dh$$
$$\frac{1}{p} \cdot dp = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dh$$
$$\int_{p_0}^p \frac{1}{p} \cdot dp = \int_0^h -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dh$$
$$\left. \begin{array}{l} \int_{p_0}^p \frac{1}{p} \cdot dp = [\ln p]_{p_0}^p = \ln p - \ln p_0 = \ln \frac{p}{p_0} \\ \int_0^h -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dh = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot \int_0^h dh = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot [h]_0^h = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h \end{array} \right\} \rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h$$

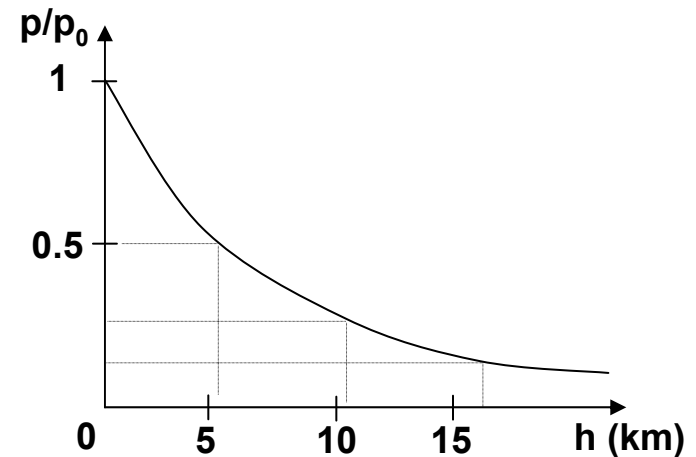
$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h \quad \longrightarrow \quad \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h} \quad \longrightarrow \quad p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h}$$

Boltzmann-féle eloszlás

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$$

barometrikus magasságformula

pl. tengerszinten a légnyomás 1 atm = 10^5 Pa
 5.5 km magasan 0.5 atm
 11 km 0.25 atm



kémény huzat: kívül hideg levegő, belül meleg $\longrightarrow$ kisebb a sűrűsége a kéményben
 alul mint a kéményen kívül lent $\longrightarrow$ a levegő lent kívülről befelé áramlik

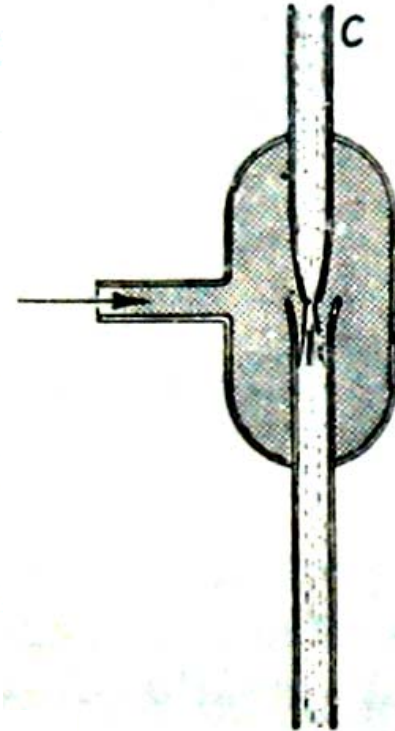
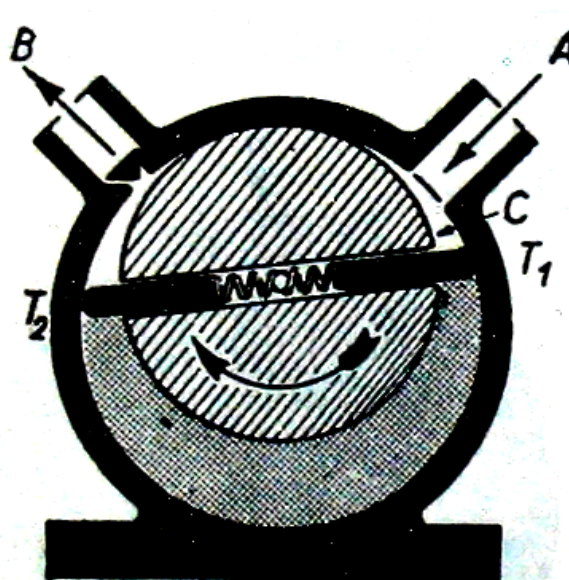
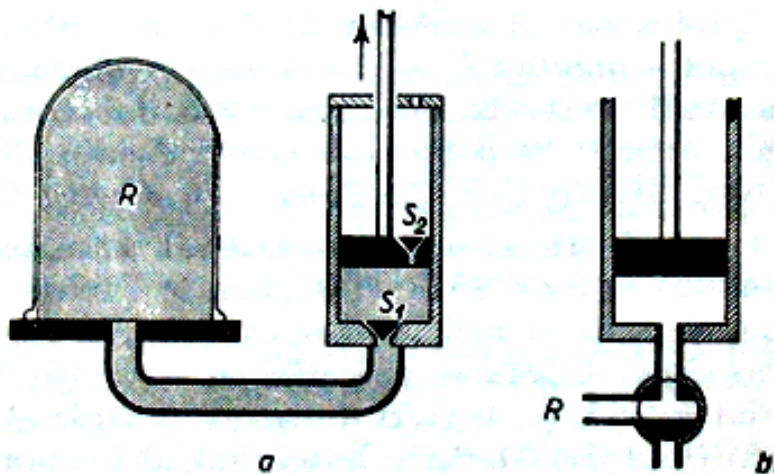
hőlégballon

gázzal töltött léggömb, léghajó;

H_2 v. He (gyúlékony / drága)

vákuumszivattyúk, kompresszorok :

vákuum $\approx 10^3$ - 10^2 Pa alatt, HV, UHV

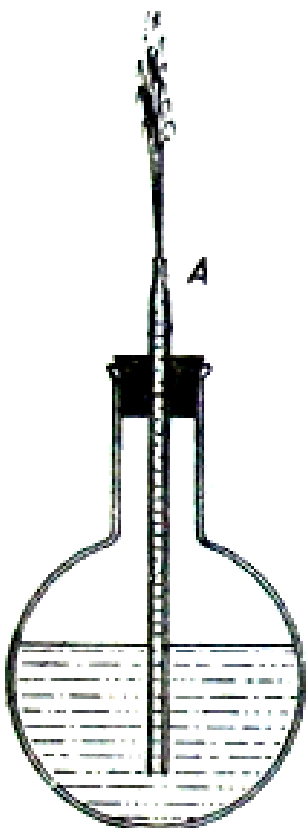
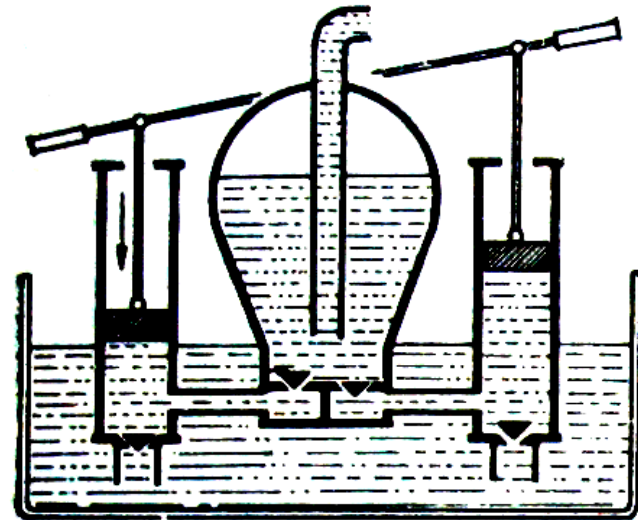


**+ olajdiffúziós szivattyúk, turbomolekulár..., iongetter, stb...
kompresszorok....**

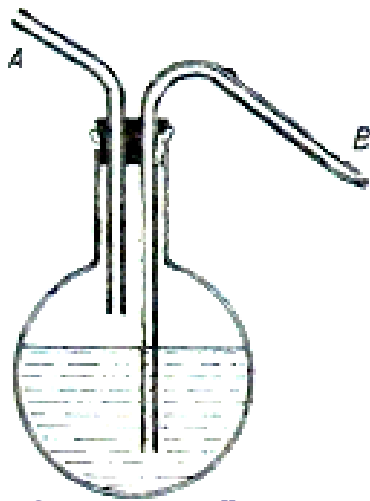


a levegő nyomásán alapuló eszközök:

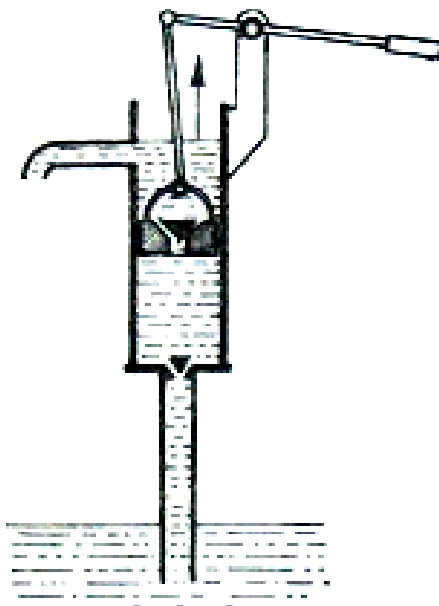
szívókút, nyomókút, tűzoltófecskendő,
centrifugálszivattyú, lopó, pipetta,
szívószál, szivornya, injekciós
fecskendő



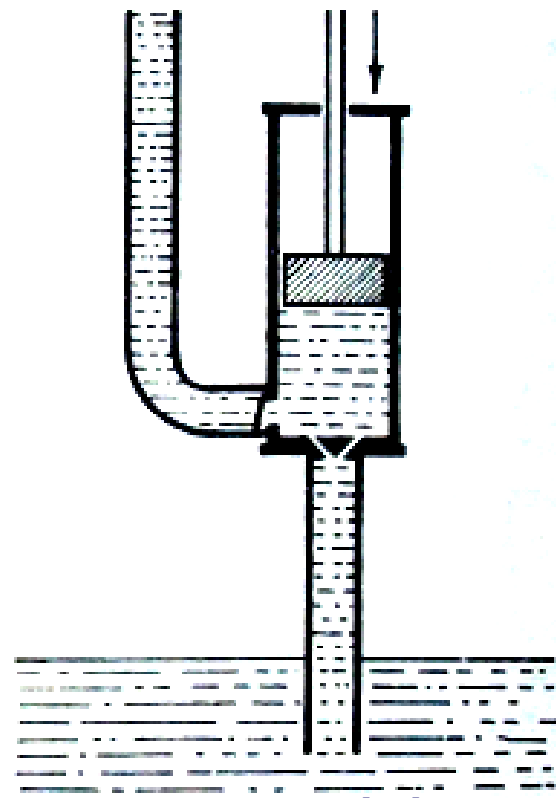
„Heron-labda”



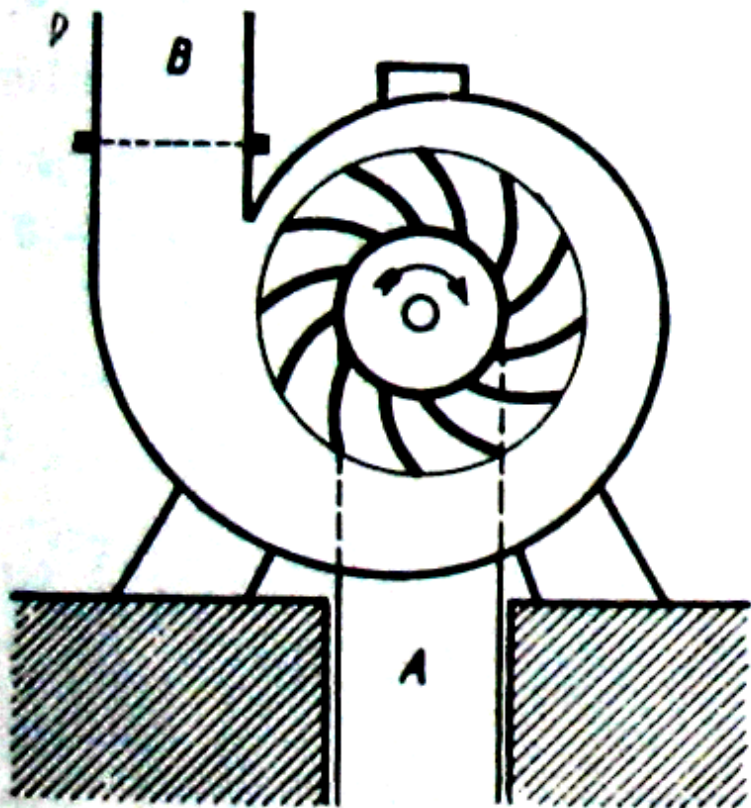
fecskendőüveg



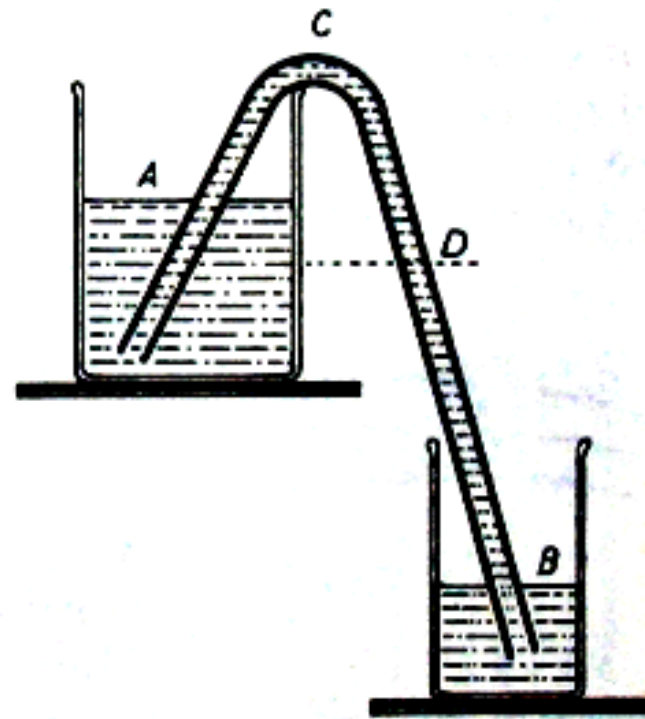
szívókút
max 10m mélyről!



nyomókút



centrifugálszivattyú



lélegzés is !!!



folyadékok és gázok áramlása :

együtt tárgyalható, mert kis áramlási sebességeknél (~ 10 m/s alatt) és kis magasságkülönbségek (néhány 100 m) esetén a gázokat is összenyomhatatlannak lehet venni

áramlási tér (sebességtér) : $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) = \vec{v}(\vec{r}, t)$ adott minden pontban

áramvonal : azon görbék melyek érintői a tér minden pontjában az ottani sebesség irányába esnek

áramcső : az áramlási térben felvett zárt görbén átmenő áramvonalak

az áramlási csőben a foly. úgy áramlik, mint merev falú csőben (mert nincsenek a cső falára merőleges komponensek)

$$\left. \begin{aligned} p &= p(x, y, z, t) = p(\vec{r}, t) \\ \rho &= \rho(x, y, z, t) = \rho(\vec{r}, t) \end{aligned} \right\} \text{ is hely- és időfüggő}$$

ha $p = \text{const.}$  egyszerűbb leírás

külső erők (grav.erő), és/vagy nyomáskülönbségek  áramlás

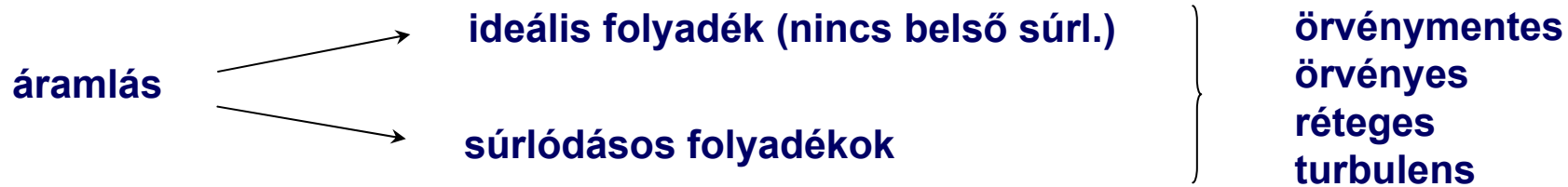
de : belső súrlódás !

pl. : légáramlás = szél keletkezése, porszívó, ventilátor



pl. : folyadék áramlása : pl vízcső, ...





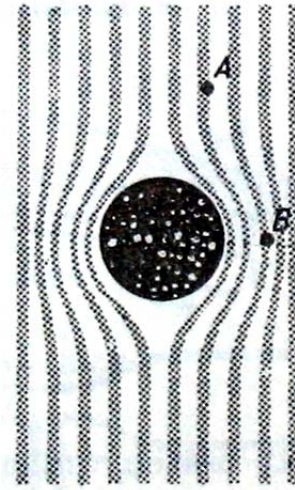
vagy :



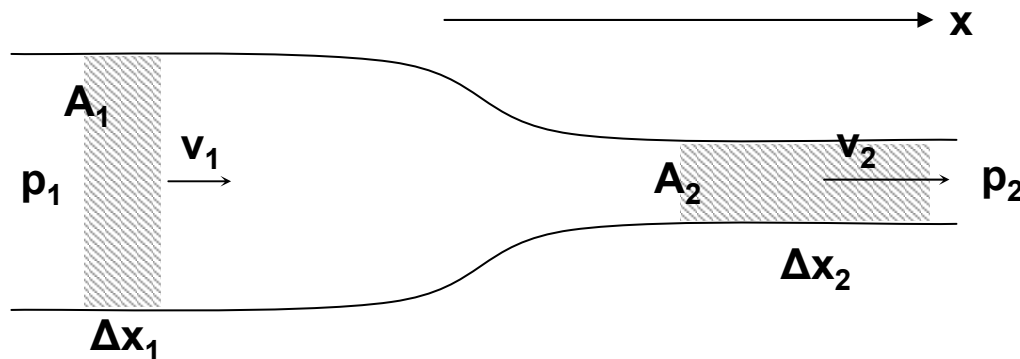
összenyomhatatlan, homogén folyadékok stacionárius áramlása:

kontinuitási egyenlet : $A \cdot v = \text{állandó}$ vagy $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$

(áramvonalak sűrűségével :
ahol az áramvonalak sűrűbbek, ott v nagyobb)



pl. : vízcsapból lefelé kifolyó vízszugár miért keskenyedik ?



$$V_1 = V_2$$

$$A_1 \cdot \Delta x_1 = A_2 \cdot \Delta x_2$$

$$A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$$

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

vagy az árammal :

$$I = \frac{V}{\Delta t} = \frac{A \cdot \Delta x}{\Delta t} = A \cdot v \quad \longrightarrow \quad I = \text{állandó}$$

a Bernoulli-egyenlet : (1738)

munkatétel : $F_1 \cdot \Delta x_1 - F_2 \cdot \Delta x_2 = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$

$$\underbrace{p_1 A_1 \cdot \Delta x_1}_{\mathbf{V}} - \underbrace{p_2 A_2 \cdot \Delta x_2}_{\mathbf{V}} = \frac{1}{2} \rho V \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \rho V \cdot v_1^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$

$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{állandó} \leftarrow \text{vízszintes csőben áramló folyadékra}$$

ha nem vízszintes, akkor hidrosztatikai nyomás tag is van :

$$p_0 = \underset{\uparrow}{p} + \underset{\uparrow}{\frac{1}{2} \rho v^2} + \rho g h = \text{állandó} \quad \text{vagy} \quad p_1 + \underset{\uparrow}{\frac{1}{2} \rho v_1^2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

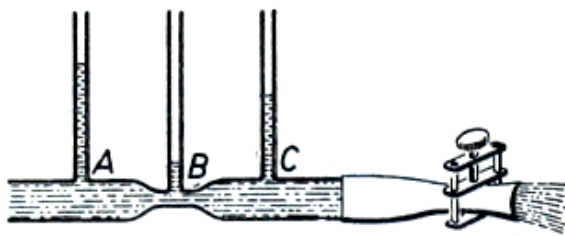
sztatikai nyomás **torlónyomás/dinamikai nyomás**

—————

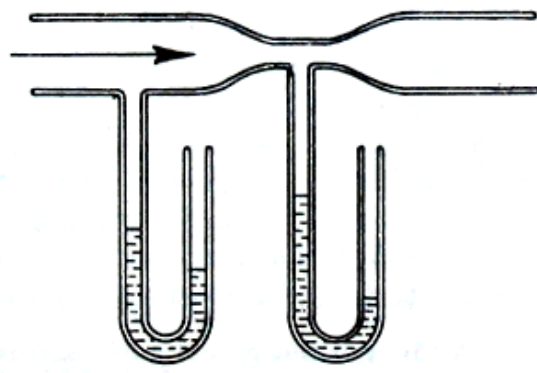
teljes nyomás

hidrosztat.nyomás
(gázoknál elhanyagolható)

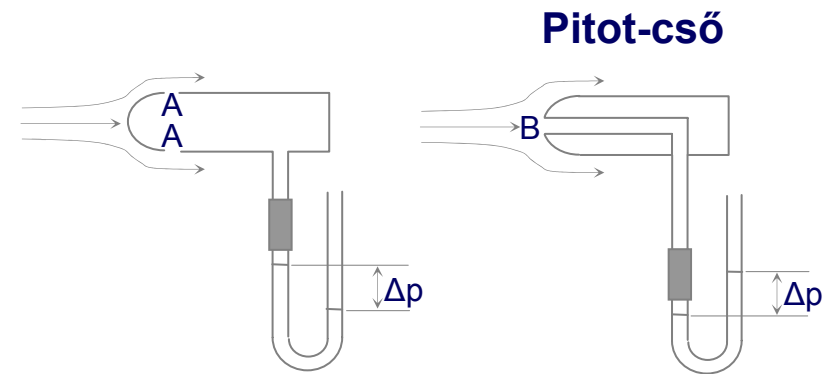
a Bernoulli-egy. alkalmazásai:



76,1. ábra



- nyomás-és sebességmérés áramlásoknál



a p sztatikai nyomást
méri A-ban

a v = 0-hoz tartozó
p₀ teljes nyomást
méri B-ben

Pitot-Prandtl cső :
a p₀-p torlónyomást méri :

áramlás seb. mérhető (pl. repülőgép) :

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}$$

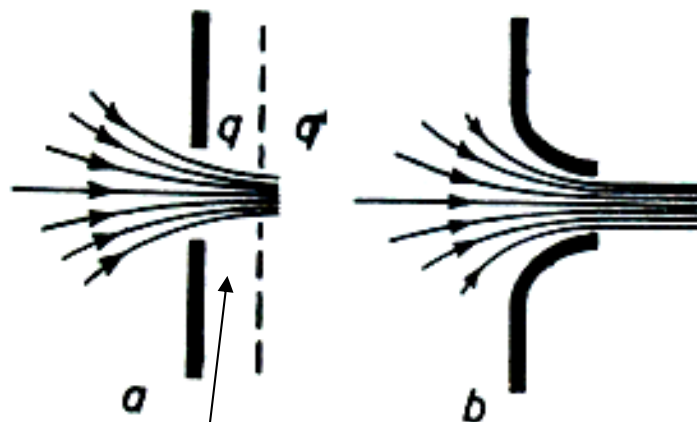
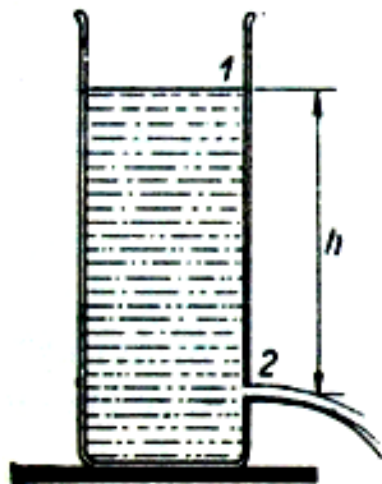
$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2$$

Venturi-cső is hasonló

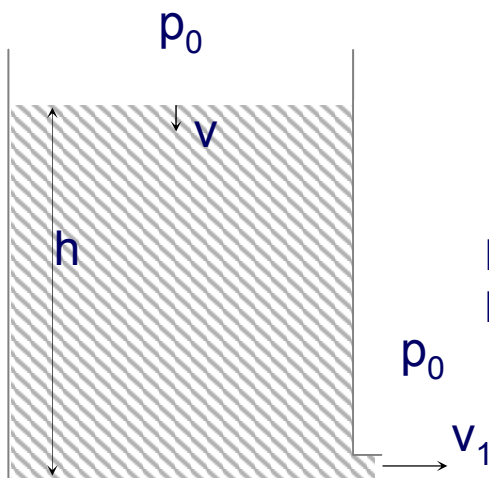
(ld. mechanika labort !!!)



- foly. és gázok kiáramlása kis nyílásokon :



Mariotte-palack



ha a foly. süllyedő felszíne sokkal nagyobb, mint a kiömlő nyílás keresztmetszete $\longrightarrow v \ll v_1 \longrightarrow v \approx 0$ – nak vehető

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

Torrichelli-féle kiömlési törv. (1646)
(levezetést ld. a gyakorlaton !)

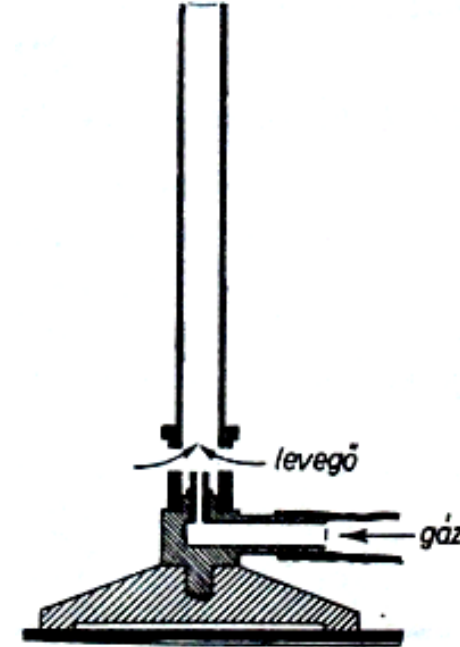
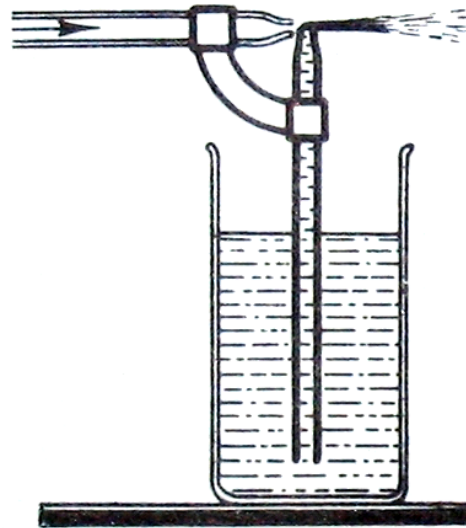
de ha ilyen a keresztmetszet $\longrightarrow$ a kiömlő nyílás valódi q'
keresztmetszete $< q \longrightarrow$ kevesebb folyadék áramlik ki

DE : v_1 nem csökken h csökkenésével a Mariotte-féle palackban

• további alkalmazások :

kísérlet : festékszóró,
folyadékpermetező

Bunsen-égő
vízlégszivattyú



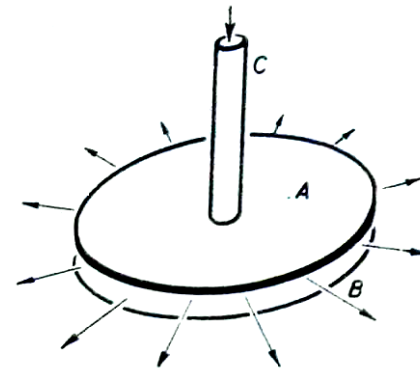
kísérlet : aerodinamikai paradoxonok :

ping-pong labda a tölcsérben → nem esik le

papírlapok közé fújni → egymás felé mozd.

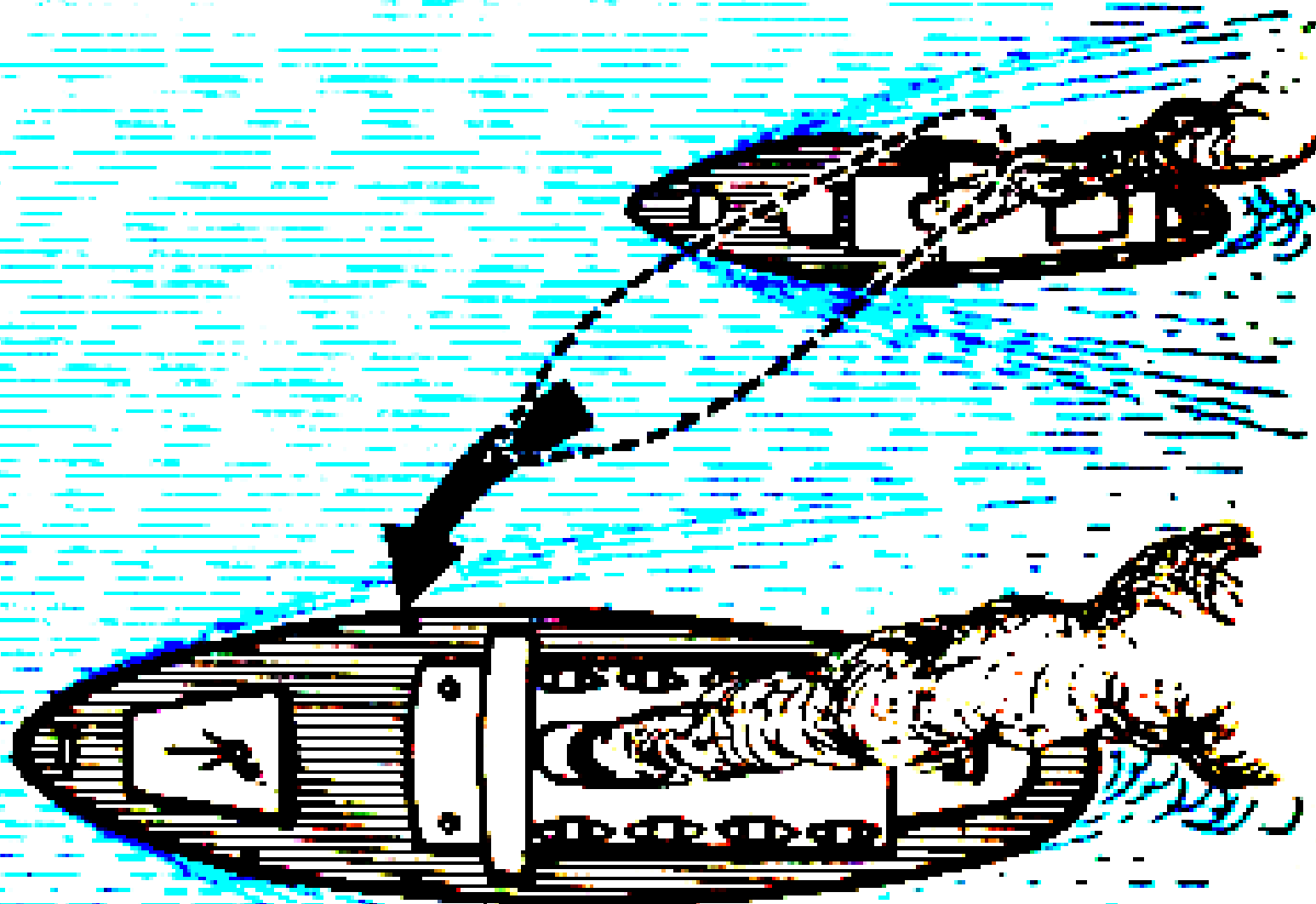
ping-pong labdák közé fújni → pattognak

cső végén korong, alatta tömör korong, csőbe fújni → az alsó korong a felsőhöz nyomódik, visszapattan,...



a vihar „leszippantja” a háztetőt
szélben jobb a kémények huzatja
nagy széllel szemben nem kapunk levegőt

pl. : a kisebbik hajó nekiütközött a nagyobbinak



pl. : mozgócsöves szivattyú :

kép : Tasnádi....: Mechanika II. 137. old.

**mozgó járművek folyadékfelvételére
(pl. mozdony vízfelvétel)**

**a Bernoulli-egy. a csőhöz
viszonyított koord.rdsz.-ben
(stacionárius áramlás !) :**

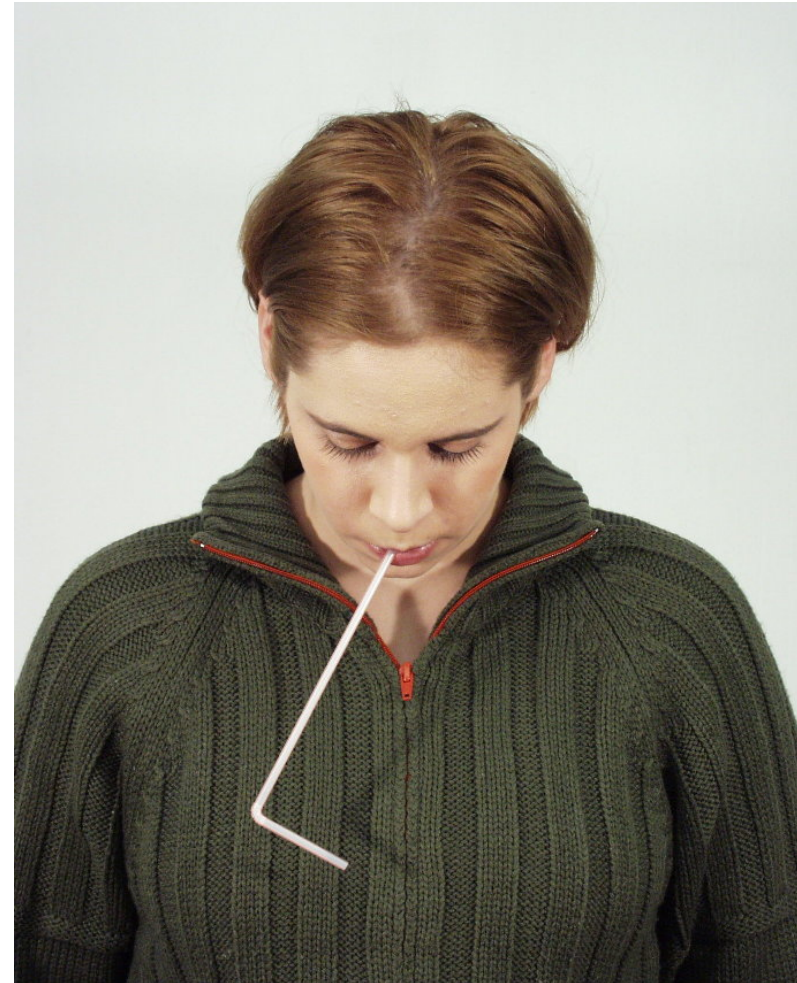
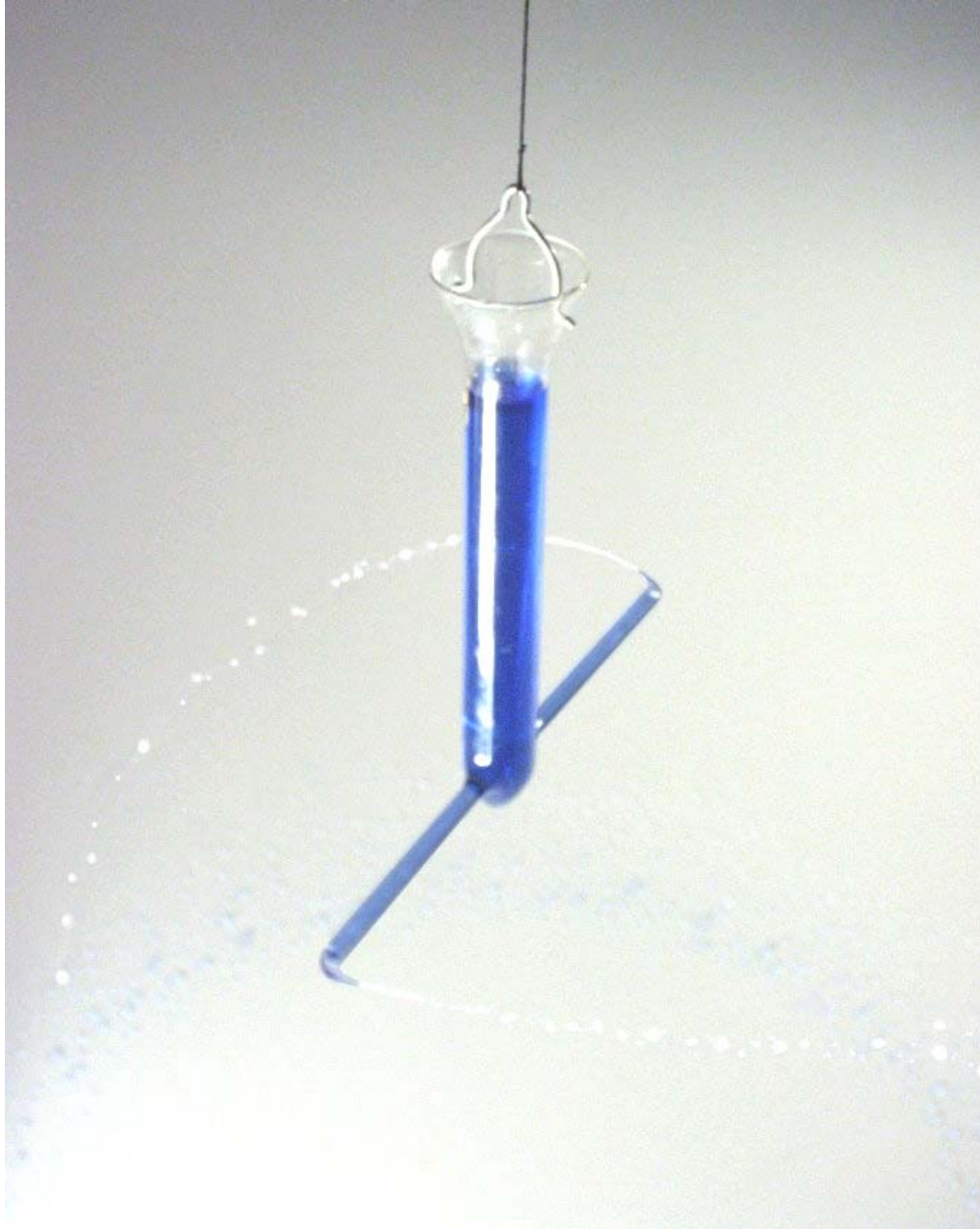
$$p_0 + \frac{1}{2} \rho \cdot (-u)^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + \rho gh \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{u^2 - 2gh}$$

pl. : forgócsöves szivattyú :

kép : Tasnádi....: Mechanika II. 138. old.

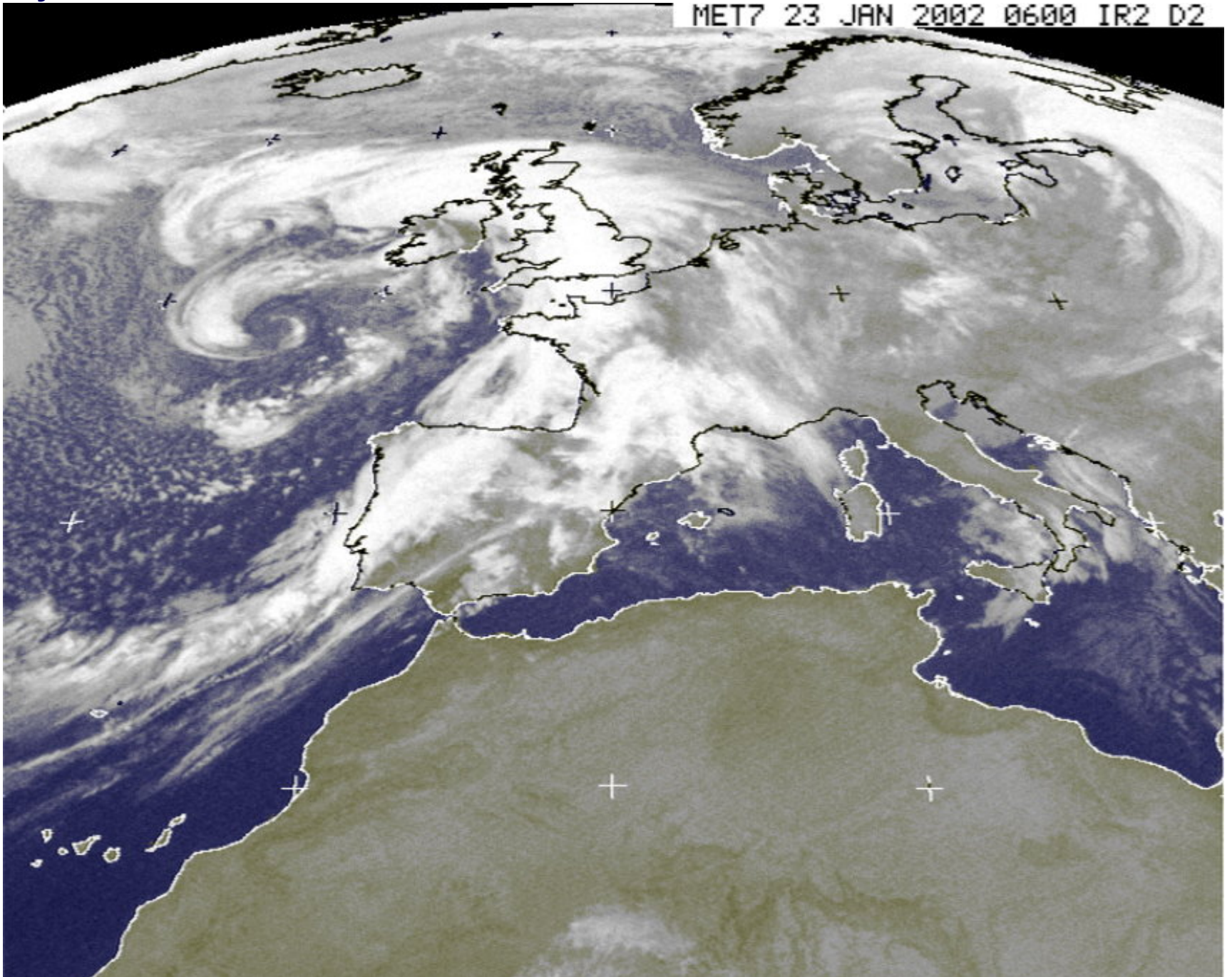
hasonló megfontolásokból $\longrightarrow$
$$v = \sqrt{r^2 \omega^2 - 2gh_3}$$

pl. : **kísérlet** : Segner-kerék :



örvényes áramlás :

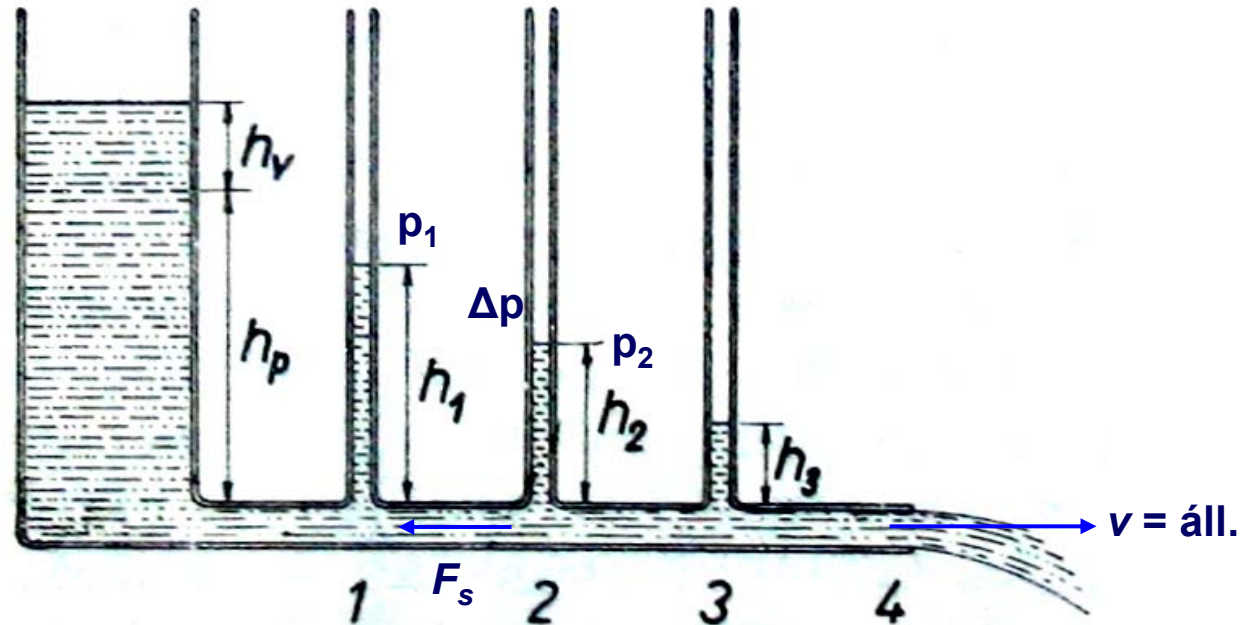
MET7 23 JAN 2002 0600 IR2 D2





súrlódásos áramlás, belső súrlódás (viszkozitás) :

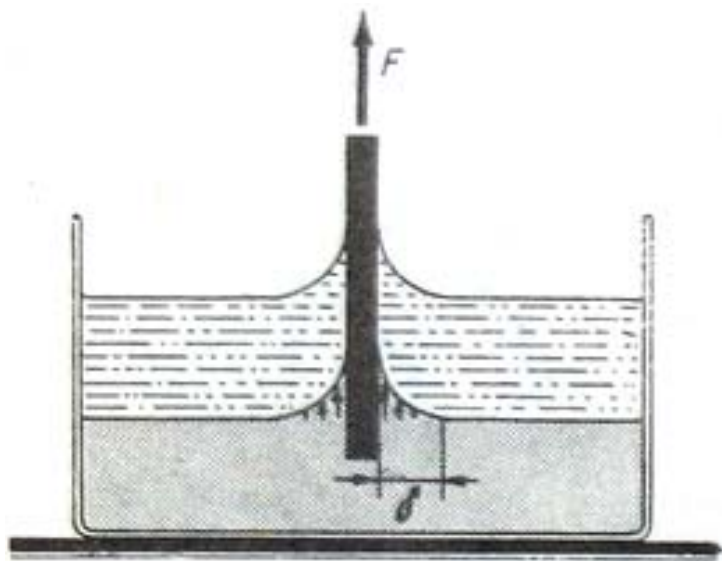
Kísérlet : vékony, mindenhol egyforma keresztmetszetű, vsz. csőben áramló foly. nyomása egyenletesen csökken (belső súrl. miatt) :



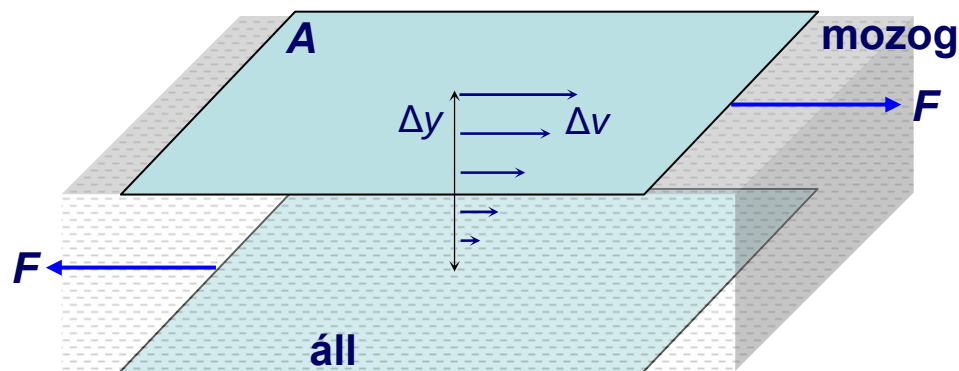
$$(p_1 - p_2) \cdot A - F_s = 0$$

↑
belső súrl.

Newton-féle belsőúrlódási törv. :



réteges áramlás :



kis sebességű áramlás ellenállás-törv.-e

$$F = \eta A \frac{dv}{dy}$$

viszkozitás seb.-gradiens

Kísérlet : kanalat kihúzni mézből

η függ T -től (pl hideg méz – meleg méz, vagy szurok, stb...)

↑
amorf, hidegen is folyik nagyon lassan (évek alatt átfolyik a tölcséren)

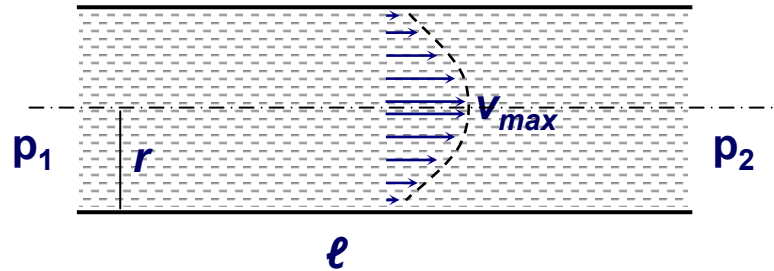
falba rögzített vsz. üvegrúd is lehajlik évek alatt

áramló folyadékban érintőleges feszültségek lépnek fel, DE : nem rugalmas feszültség !!!, hanem a sebességkülönbséget akarja kiegyenlíteni :

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dy}$$

folyadékok áramlása csőben :

a. parabolikus sebességprofil :



egy-egy folyadékréteg = vékony falú csövek egymásban

stacionárius áramlás $\rightarrow$ a rétegekre ható erők (a belül levő előre húzza, a külső szomszéd lassítja, és $(p_1 - p_2) \cdot A$ eredője = 0 $\rightarrow$ levezethető a parabolikus profil

b. $\frac{V}{t} = ? \rightarrow I \equiv \frac{V}{t} = A \cdot v$



$$F = (p_1 - p_2) \cdot A \leftarrow A = r^2 \cdot \pi$$

az adott sebességű áramlás fenntartásához $F = 8\pi\eta\ell v$ erő szükséges

$$I \equiv \frac{V}{t} = A \cdot v = A \cdot \frac{F}{8\pi\eta\ell} = A^2 \cdot \frac{p_1 - p_2}{8\pi\eta\ell} = r^4 \pi^2 \cdot \frac{p_1 - p_2}{8\pi\eta\ell}$$

$$I \equiv \frac{V}{t} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\ell} \cdot r^4 \leftarrow \text{Hagen-Poiseuille-törvény}$$

$$I \equiv \frac{V}{t} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\ell} \cdot r^4 \longrightarrow \text{pl.: öntözőberendezések}$$

golyó mozgása folyadékban :

Stokes-törvénye : $F = -6\pi\eta r v \rightarrow$ közegellenállás

viszkozitás mérése : Ostwald-féle viszkoziméterrel
 Höppler-féle viszkoziméterrel
 Stokes-törvénye alapján

leírásokat ld. mech.labor-ban

pl. : Ostwald-féle viszkoziméter :

$$p_1 - p_2 = \rho g h \equiv \rho g \ell$$

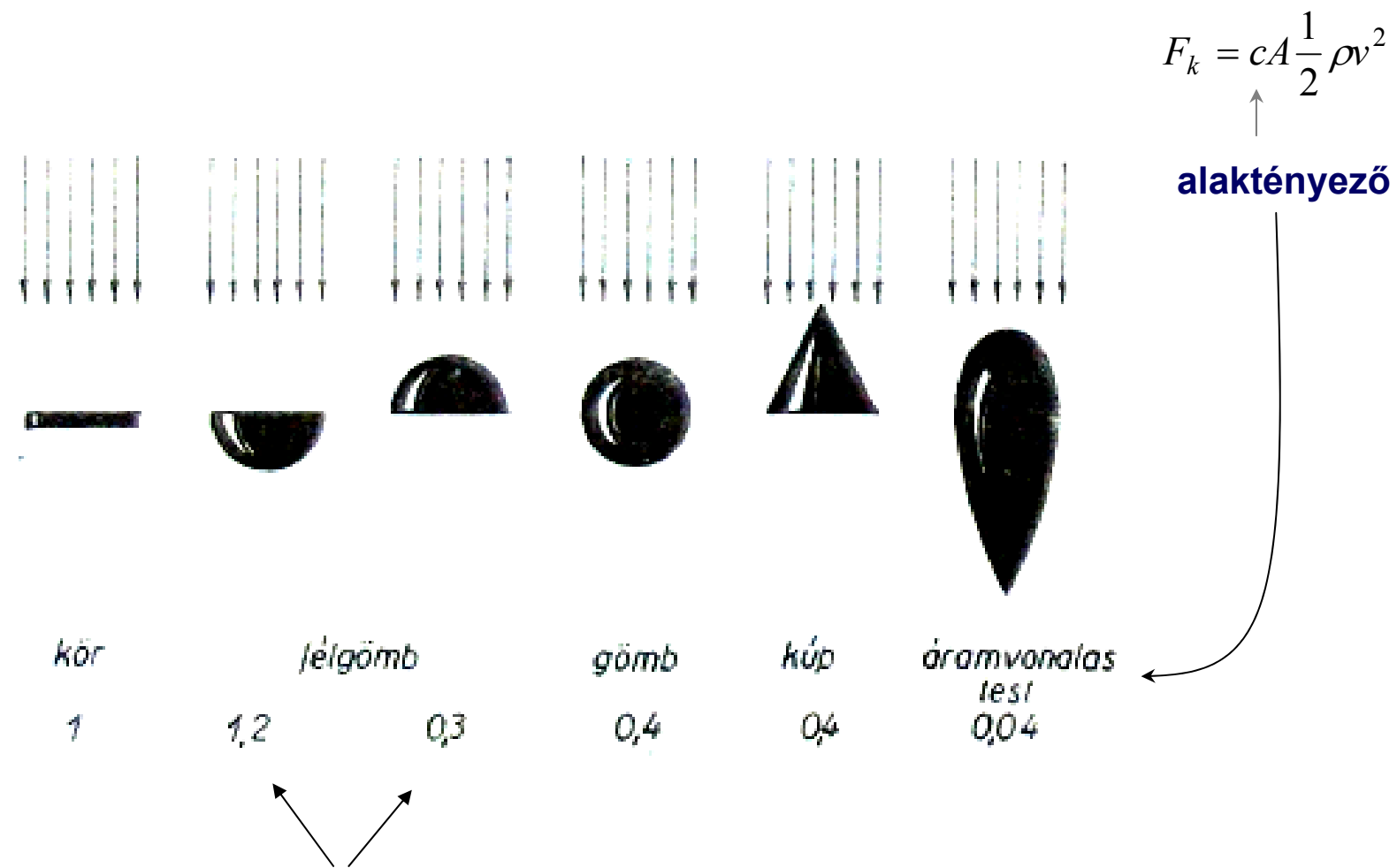
$$V = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\ell} \cdot r^4 \cdot t = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\rho g \ell}{\ell} \cdot r^4 \cdot t = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\rho g}{\eta} \cdot r^4 \cdot t \longrightarrow \eta = \underbrace{\frac{\pi \cdot r^4 \cdot g}{8V}}_{\text{műszerállandó (k)}} \cdot \rho \cdot t$$

$$\eta = k \cdot \rho \cdot t$$

közegellenállás :

(áramlási ellenállás, hidrodinamikai ellenállás)

kis sebességekre (< m/s) : lamináris áramlás; F_k lineárisan függ v – től : Stokes-törv.
nagy sebességeknél (m/s-) : örvényképződés; F_k a v^2 – től függ :



pl. : hogyan célszerű hordót vinni tetőcsomagtartón ?

turbulens áramlás :

áramlási sebesség növelésével a réteges áramlás átmegy turbulensbe →

Reynolds-szám :
$$R_e = \frac{\rho r v}{\eta}$$

ha $R_e \geq 1160$ (kritikus érték) → az áramlás turbulens lesz

Hagen-Poiseuille-törv. érvényét veszti, az áramerősség lényegesen csökken, a cső ellenállása megnő

hidrodinamikai hasonlóság törvénye :

dinamikailag azonos áramlási viszonyok geometriailag hasonló testek körül akkor alakul ki, ha $R_{e,1} = R_{e,2}$ → pl. repülőgépek körüli áramlás úgy modellezhető egy 10x kisebb modellen, ha 10x olyan nagy az áramlási sebesség !

örvények keletkezése, határréteg :

két, laminárisan áramló folyadékáram találkozásakor (pl. 2 folyó egymásba ömlése, v. egy foly.sugár beáramlik nyugvó folyadékba) a súrl. miatt örvények keletkezhetnek : az elválasztó felület mentén a foly.-részecskék forgó mozgásba jönnek

örv.-k keletkeznek áramló foly.-ban nyugvó, v. nyugvó foly.-ban mozgó testek mögött is (pl. hídpillér mögött, kanalat mozgatunk levesben, de autó mögött a levegő is)

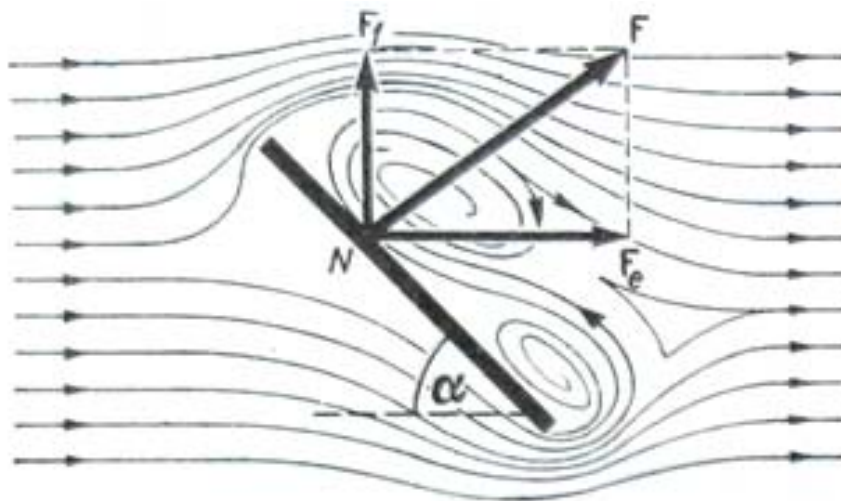
Kísérlet : Id. VIDEÓ-t is

kör alakú nyíláson nagy sebességgel áthaladó foly. v. gázban örvénygyűrűk keletkeznek, több méterre is eljuthatnak és elfújják a gyertyalángot → az örvények nagy stabilitásúak és „merevek” → folyókban veszélyes az úszók számára

határréteg : kis viszkozitású közegben (víz, levegő) mozgó test esetén a belső súrl.-t csak a szilárd test falai melletti rétegben (= határréteg) kell figyelembe venni
pl. : repülőgép szárnyai mellett a határréteg $1 \text{ cm} \leq \delta \leq 10 \text{ cm}$

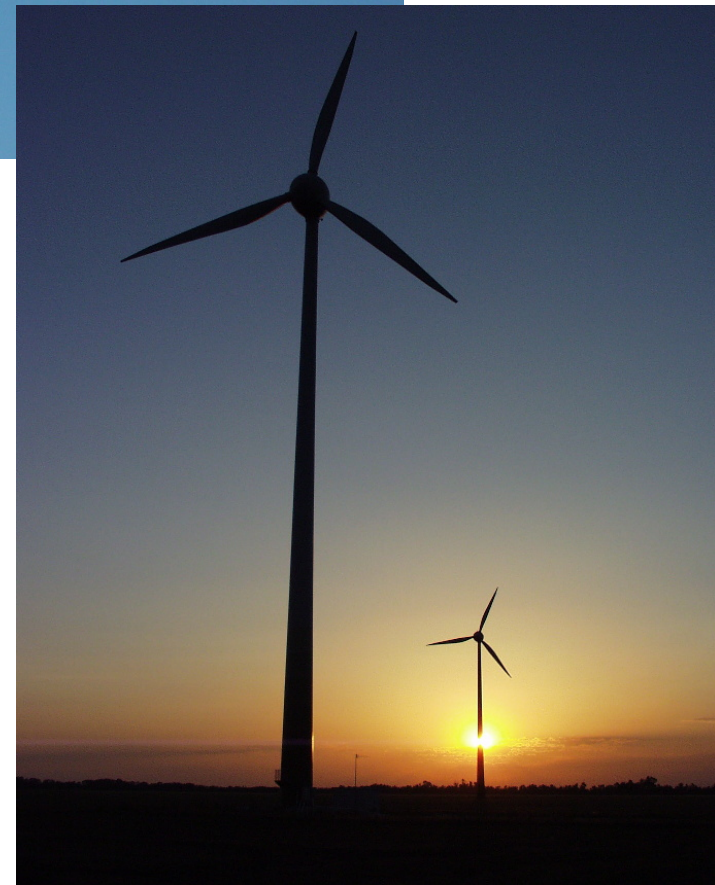
a dinamikai felhajtóerő :

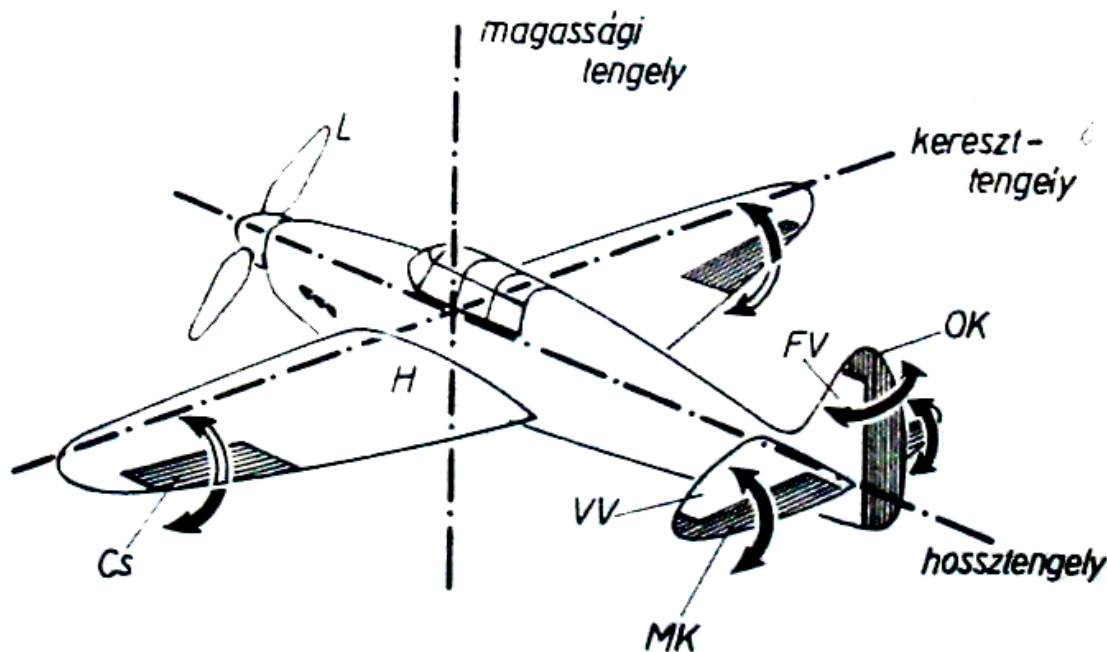
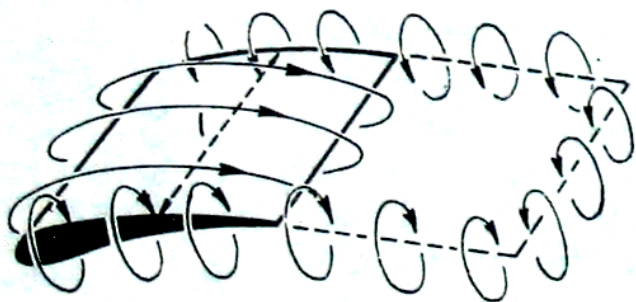
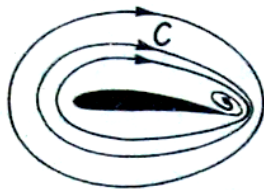
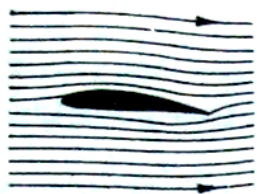
repülőgépszárny,



rotor profilja :







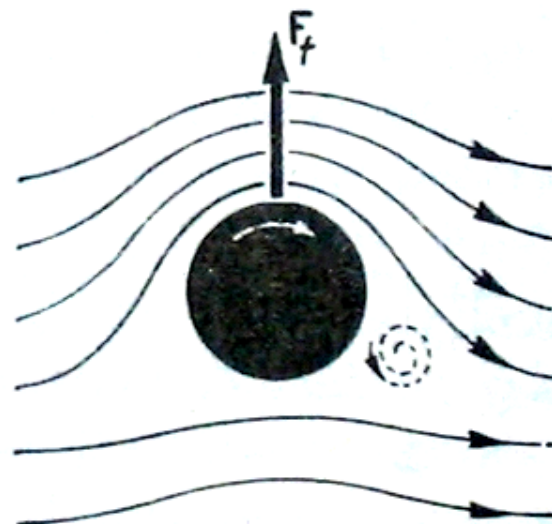
a Magnus-effektus (1853) :

közegben forogva haladó test „elkanyarodik”,
pl, szabadrúgás megkerüli a sorfalat, tenisz,
ping-pong labda megcsavarása

kísérlet :

léggömböt megpörgetve elejtünk → nem függőlegesen esik le

Id. VIDEÓ-t is

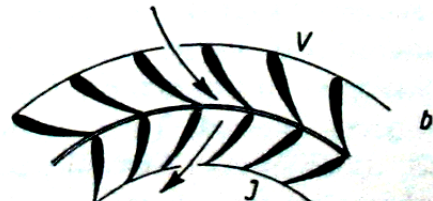
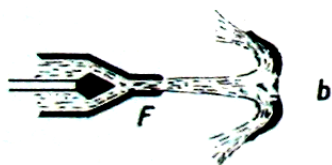
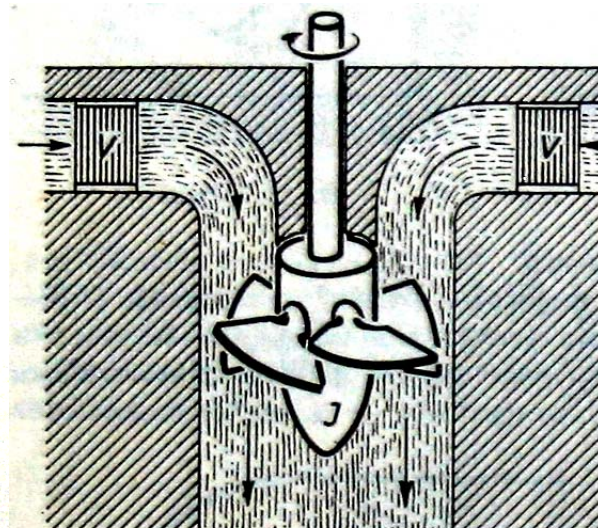
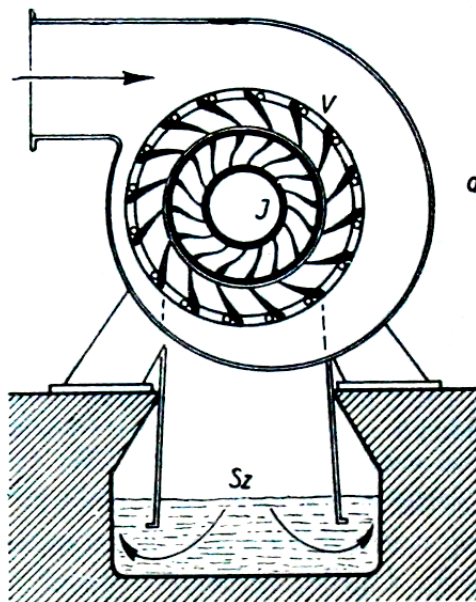
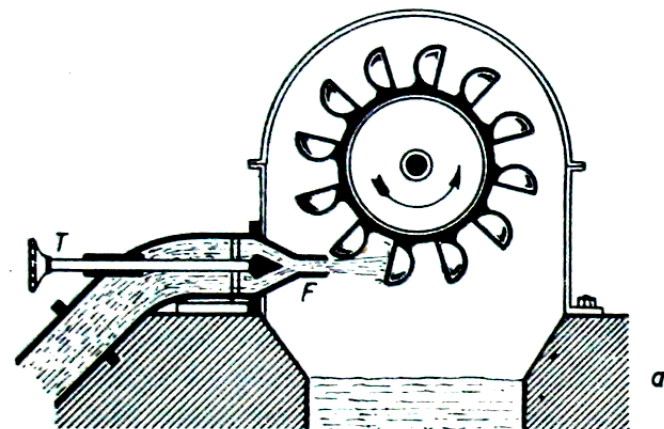
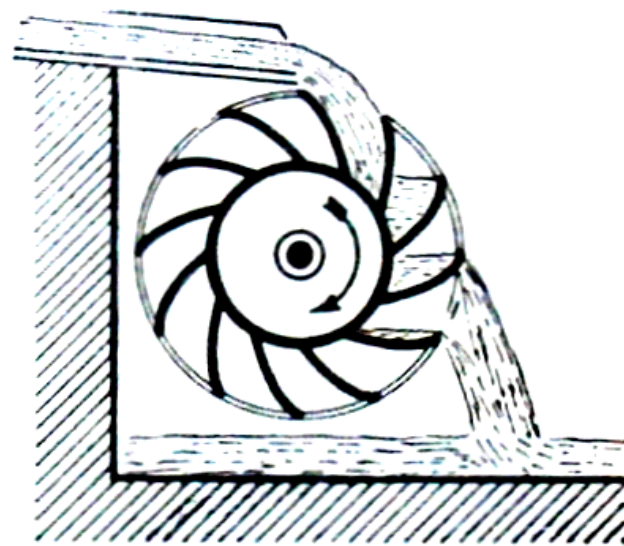
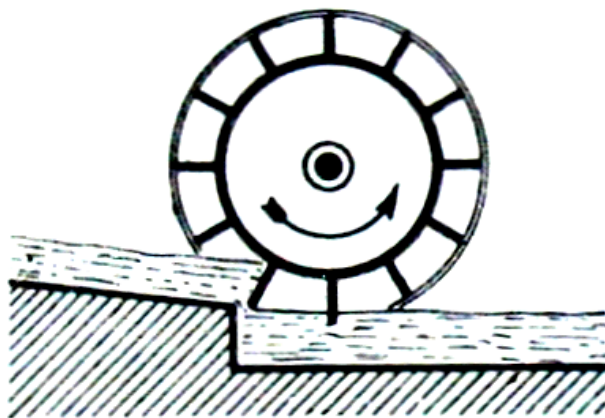


vízierőgépek :

pl. túristvándi vizimalom :

**vizkerekek,
turbinák**

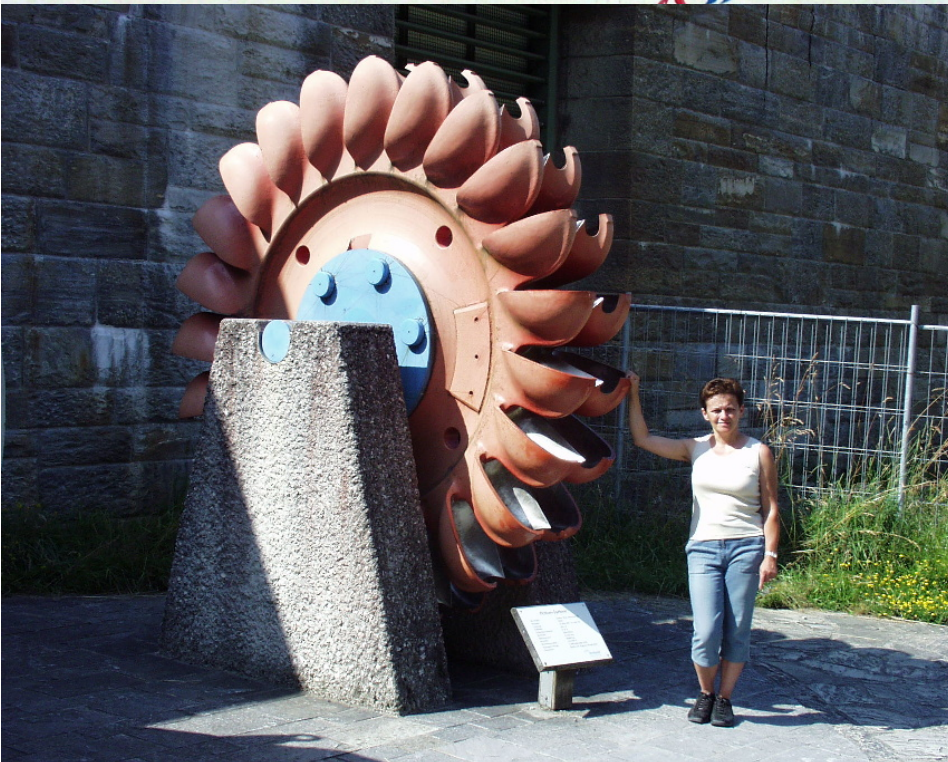
hatásfok





Pelton-Turbine

Hersteller:	Escher Wyss, Ravensburg
Baujahr:	1950
Leistung:	31.000 kW / 41.600 PS
Fallhöhe:	845 m
Schluckvermögen:	4 m ³ /s
Drehzahl:	500 U/min
Durchmesser:	2.760 mm
Gewicht:	6.880 kg
Betriebsstunden:	110.000 h
Erzeugte Energie:	2.480.000.000 kWh
Einsatzort:	Kraftwerk Kaprun-Hauptstufe



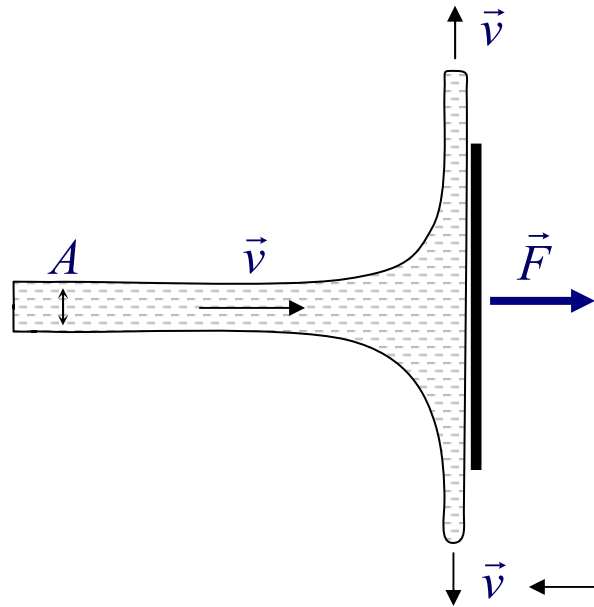
Francis-Turbine

Hersteller:	J. M. Voith GmbH
Baujahr:	1957
Leistung:	31.000 kW / 42.000 PS
Füllhöhe:	142 m
Schluckvermögen:	27 m ³ /s
Drehzahl:	375 U/min
Durchmesser:	2.265 mm
Gewicht:	5.850 kg
Betriebsstunden:	150.378 h
Erzeugte Energie:	3.200.000.000 kWh
Einsatzort:	Kraftwerk Schwarzach



a turbina teljesítménye :

egy vsz.-en v sebességgel érkező, A keresztmetszetű vízszög egy függ., nyugvó lapra erőhatást fejt ki :



(a gravitációtól eltekintünk)

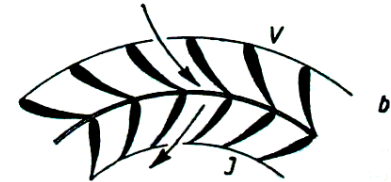
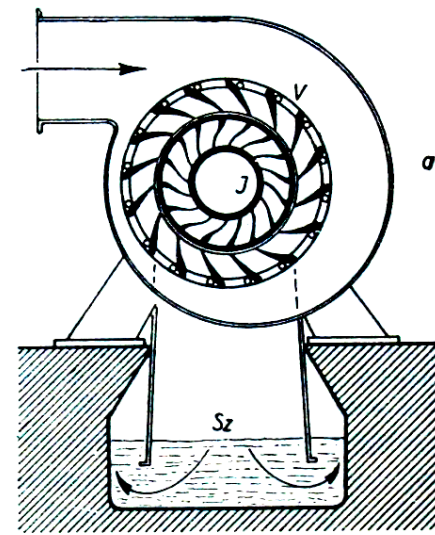
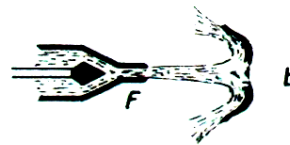
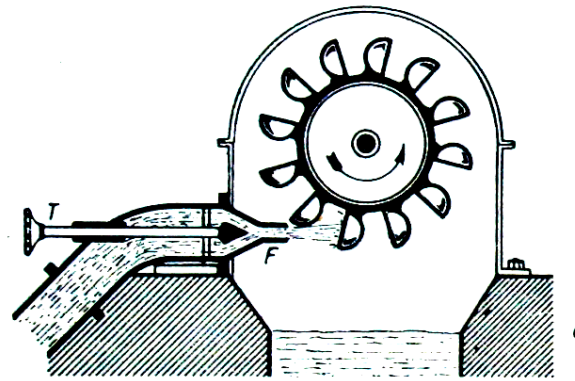
mindenhol ugyanakkora seb.-el áramlik, mert a nyomás mindenhol egyforma (Bernoulli-törv.)

összenyomhatatlan $\longrightarrow$ kontinuitási egy. is érv. $\longrightarrow$ a lap mentén elfolyó összkétszmet is A

$\longrightarrow$ a lap miatt a folyadék a lapra merőleges sebességét veszíti el: $|\Delta \vec{v}| = v$

impulzustétel :

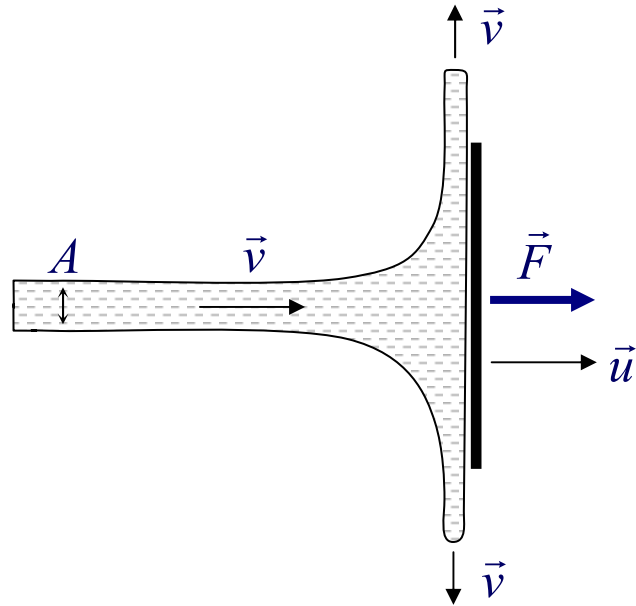
$$|\vec{F}| = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{\Delta(\rho V) \cdot v}{\Delta t} = \frac{\Delta(\rho A v \Delta t) \cdot v}{\Delta t} = \rho A v^2$$



ha a lap vsz.-en u sebességgel mozog a folyadéksugárral egyező irányban :

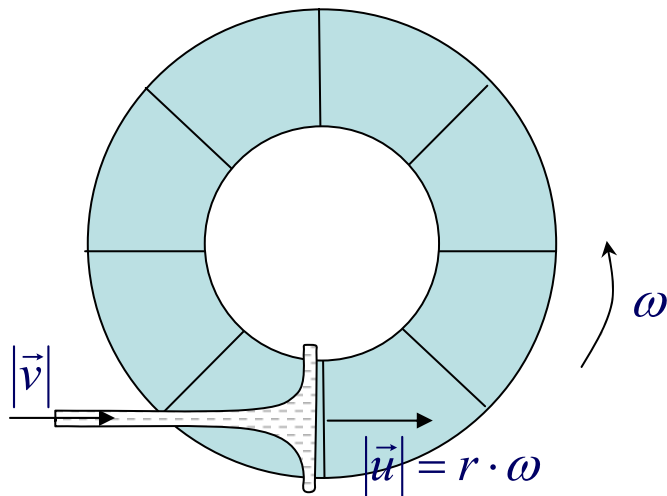
a lappal együtt mozgó koord.rdsz.-ben az áramlás stacionárius $\longrightarrow$ az előző gondolatmenet érv., csak a foly.-sugár seb.-e $v-u$ lesz a laphoz képest :

$$|\vec{F}| = \rho A (v - u)^2$$



forgó turbina esetén az u sebességgel mozgó lapát helyére mindig újabb érkezik $\longrightarrow$ a jelenség kvázistacionáriusnak vehető :

a kilépő vízszugár vsz. sebességkomponense megegyezik a lapátok u sebességével
a lapátoknak átadott impulzus, vagyis a rdsz.-re (= a teljes turbinára) időegység alatt kifejtett átlagos erő :



$$\overline{F} = \underbrace{\rho A v}_{\text{időegység alatt érkező víztömeg}} \cdot \underbrace{(v - u)}_{\text{sebességváltozás}}$$

időegység alatt
érkező víztömeg

sebességváltozás

pl. a Pelton-turbina esetén :
a vízszög 180°-os eltérülést szenved

↓
álló lapát esetén $\Delta v = 2v$

↓
$$\overline{F} = 2\rho A v^2$$

u seb.-el mozgó lapátok :

$$\overline{F} = 2\rho A v \cdot (v - u)$$

↓
az átlagteljesítménye :

$$\overline{P} = \overline{F} \cdot u = 2\rho A v \cdot (v - u) \cdot u$$

P maximuma : $\frac{d\overline{P}}{du} = 2\rho A v \cdot (v - 2u) = 0 \rightarrow u = \frac{v}{2}$ ekkor a kilépő vízszög seb.-e = 0,
vagyis a víz az összes energiáját elveszíti a turbinán (a turbina átveszi)

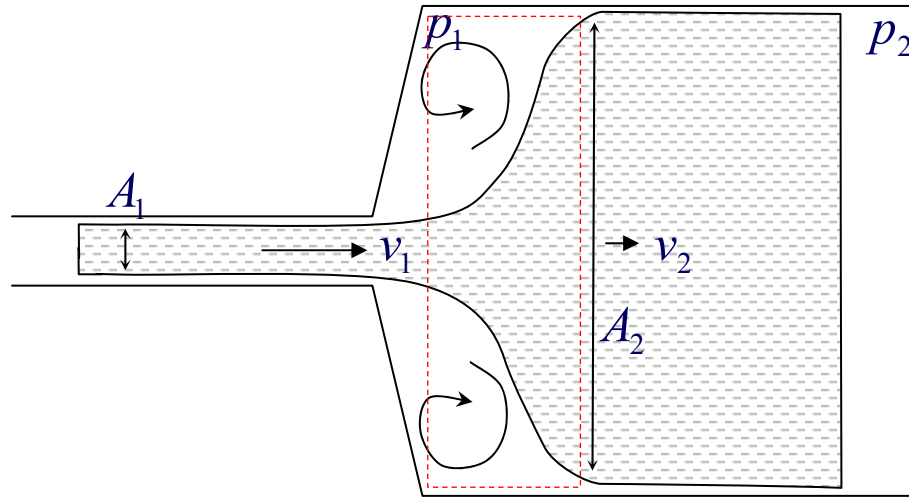
de : **VESZTESÉGEK** $\rightarrow$ hatásfok < 1 !!!



veszteségek áramló folyadékban :

változó keresztmetszetű cső → változó áramlási keresztmetszet

pl. hirtelen vastagabb cső → a belépő folyadéksugár csak fokozatosan bővül erre a keresztmetszetre → mögötte (mellette) örvények → nyomásvesztés lép fel :



örvények nélkül is leírható : az imp.-tétel a szaggatott vonal által közrefogott felületbe zárt folyadékra
(a felületbe időegység alatt bevitt imp. = a felületre ható eredő nyomóerővel) :

$$\rho A_2 v_2^2 - \rho A_1 v_1^2 = p_1 A_1 - p_2 A_2$$

+ a kont.egy. : $A_1 v_1 = A_2 v_2$

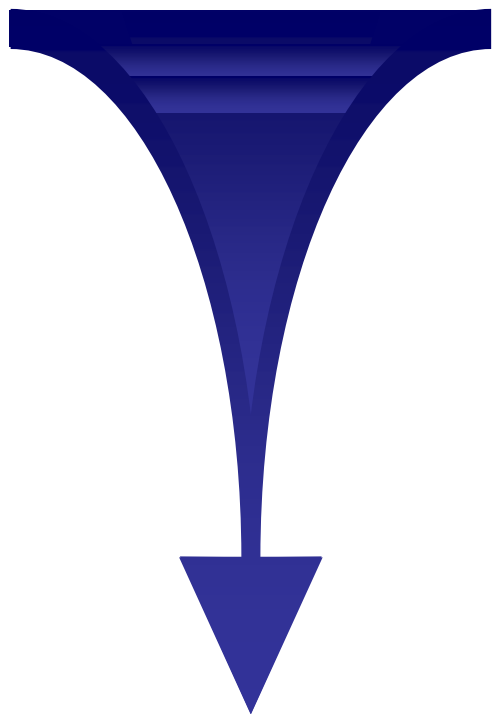
$$(p_2 - p_1)_{\text{reális}} = \rho v_2 (v_1 - v_2)$$

ideális foly.-ra a Bernoulli-egy. szerint $(p_2 - p_1)_{\text{ideális}} = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$ lenne

a bekövetkező többletnyomás-csökkenés = $\Delta p_{\text{többlet}} = (p_2 - p_1)_{\text{id}} - (p_2 - p_1)_{\text{re}} = \frac{1}{2} \rho (v_1 - v_2)^2$
= veszteség

hasonlóan hirtelen irányváltásra is (pl. kis sugarú ív)

→ **egyenes, egyenletes vastagságú, minél vastagabb cső a jó**



**CSILLAPÍTOTT REZGÉS,
KÉNYSZERREZGÉS,
REZONANCIA,**

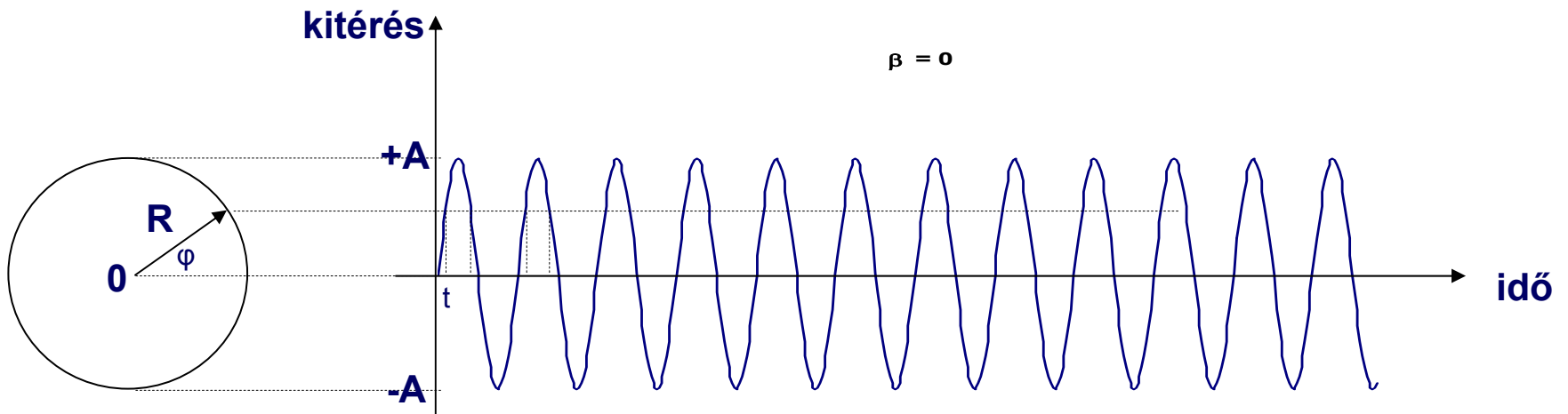
HULLÁMOK

harmonikus rezgések, fogalmak : **ismétlés** :

periodikus mozgás, harmonikus mozgás, kitérés, amplitúdó, fázis, kezdőfázis, frekvencia, periódusidő, körfrekvencia,

körmozgás és harmonikus rezgőmozgás kapcsolata :

Kísérlet : harmonikus rezgőmozgás, Fizikai kísérletek 3. CD : 21'30"



$$y = Y(t) = A \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} = A \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t = A \cdot \sin \omega t$$

így mozog pl a rúgón rezgő test :

rúgón rezgő test mozgásegyenlete :

$y = y(t)$ a helykoordináta

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} F = -D \cdot y \\ F = m \cdot a \end{array} \right\} -D \cdot y = m \cdot a$$

$$-D \cdot y(t) = m \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

ez egy differenciálegyenlet

legyen $y(t) = A \cdot \sin \omega t$ $\longrightarrow$ $\frac{dy}{dt} = A \omega \cos \omega t$ $\longrightarrow$ $\frac{d^2y}{dt^2} = -A \omega^2 \sin \omega t$

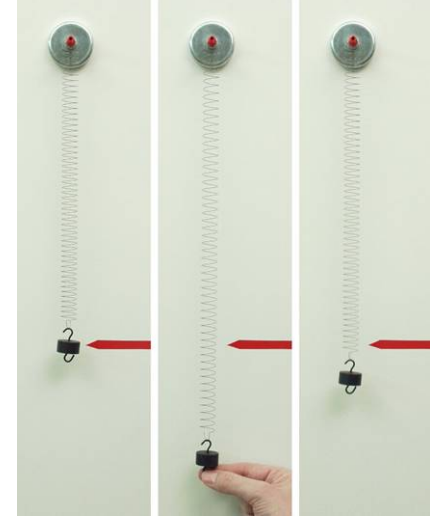
ezeket visszahelyettesítve:

$$-D \cdot A \cdot \sin \omega t = m \cdot (-1) \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t$$

$$D = m \cdot \omega^2 \quad \longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

általánosan : $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \delta)$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$



rezgések összetétele :

párhuzamos rezgések összetétele :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad x = x_1 + x_2$$

ha $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  **$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$**

ahol $\left\{ \begin{aligned} &A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \end{aligned} \right.$

speciálisan : ha $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ (azonos fázis)  **$A = A_1 + A_2$**

ha $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ (ellentétes fázis)  **$A = A_1 - A_2$**

ha $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$  **$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$**

ha pl. $\varphi_1 = \pi/2$ és $\varphi_2 = 0$  **$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1}{A_2}$**

és még $A_1 = A_2$  **$A = \sqrt{2} \cdot A_1$**

ha $\omega_1 \neq \omega_2$



legyen pl. $\varphi_1 = 0$ és $\varphi_2 = \varphi$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \cdot \sin \omega_1 t \\ x_2 &= A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi) \end{aligned} \right\} x = x_1 + x_2 = A_1 \cdot \sin \omega_1 t + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi)$$

ha még $A_1 = A_2 = A$ és $|\omega_1 + \omega_2| \gg |\omega_1 - \omega_2|$:

$\underbrace{\hspace{1cm}}$ gyors
rezgés $\underbrace{\hspace{1cm}}$ lassú
rezgés

$$x = 2A \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

az ampl. változik az időben !!! :

$$x = A(t) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

↓
lebegés

Kísérlet : lebegés hanghullámokkal (hangvillákkal)

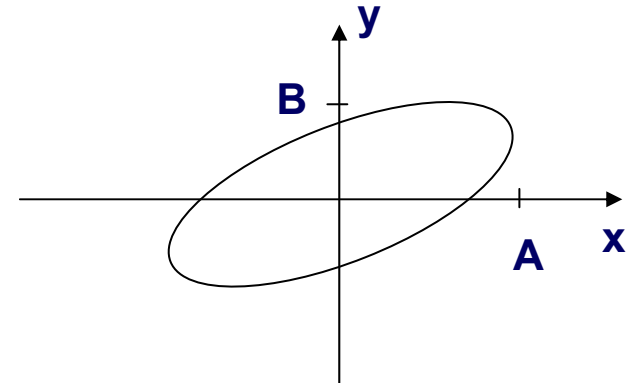
lebegés frekv.-ja: $f = f_1 - f_2$

merőleges rezgések összetétele :

$$x = A \cdot \sin(\omega_1 t) \quad \text{és} \quad y = B \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi)$$

ha $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2 \frac{x \cdot y}{A \cdot B} \cdot \cos \varphi = \sin^2 \varphi$

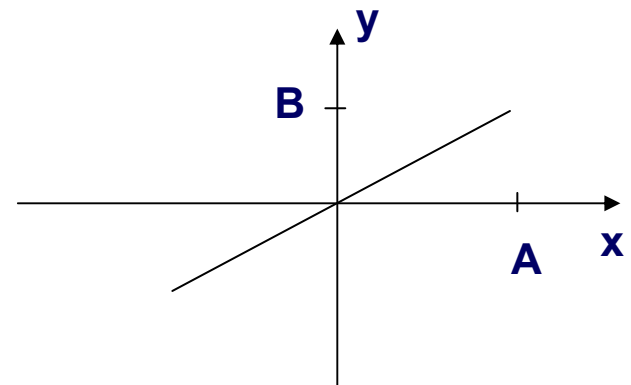
**ez egy origó kp.-ú
általános helyzetű ellipszis :**



speciálisan : ha $\varphi = 0$:

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B}$$

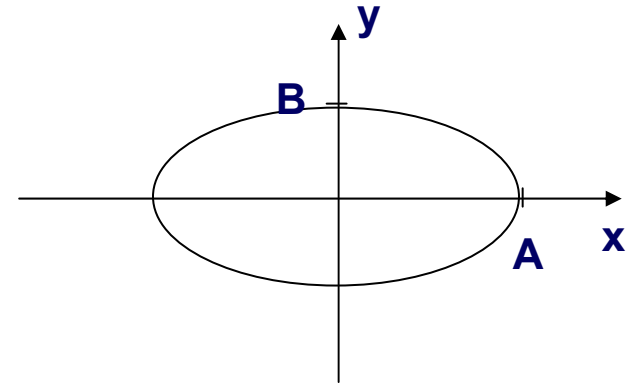
**lineárisan poláros
rezgés**



ha $\varphi = \pi/2$:

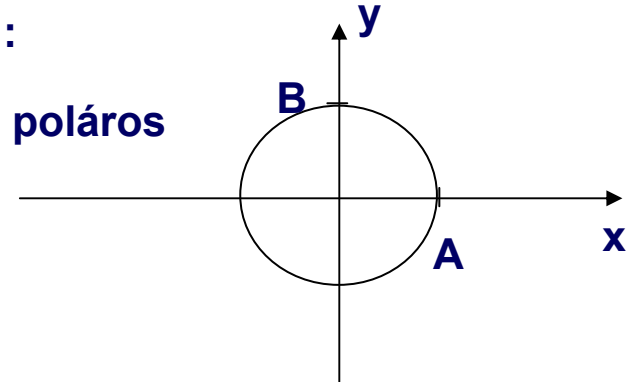
$$\frac{x^2}{A^2} = \frac{y^2}{B^2} = 1$$

elliptikusan poláros
rezgés



ha még $A = B$:

cirkulárisan poláros
rezgés



ha $\omega_1 \neq \omega_2$



Lissajous-görbék



Fizdemo

rezgések felbontása :

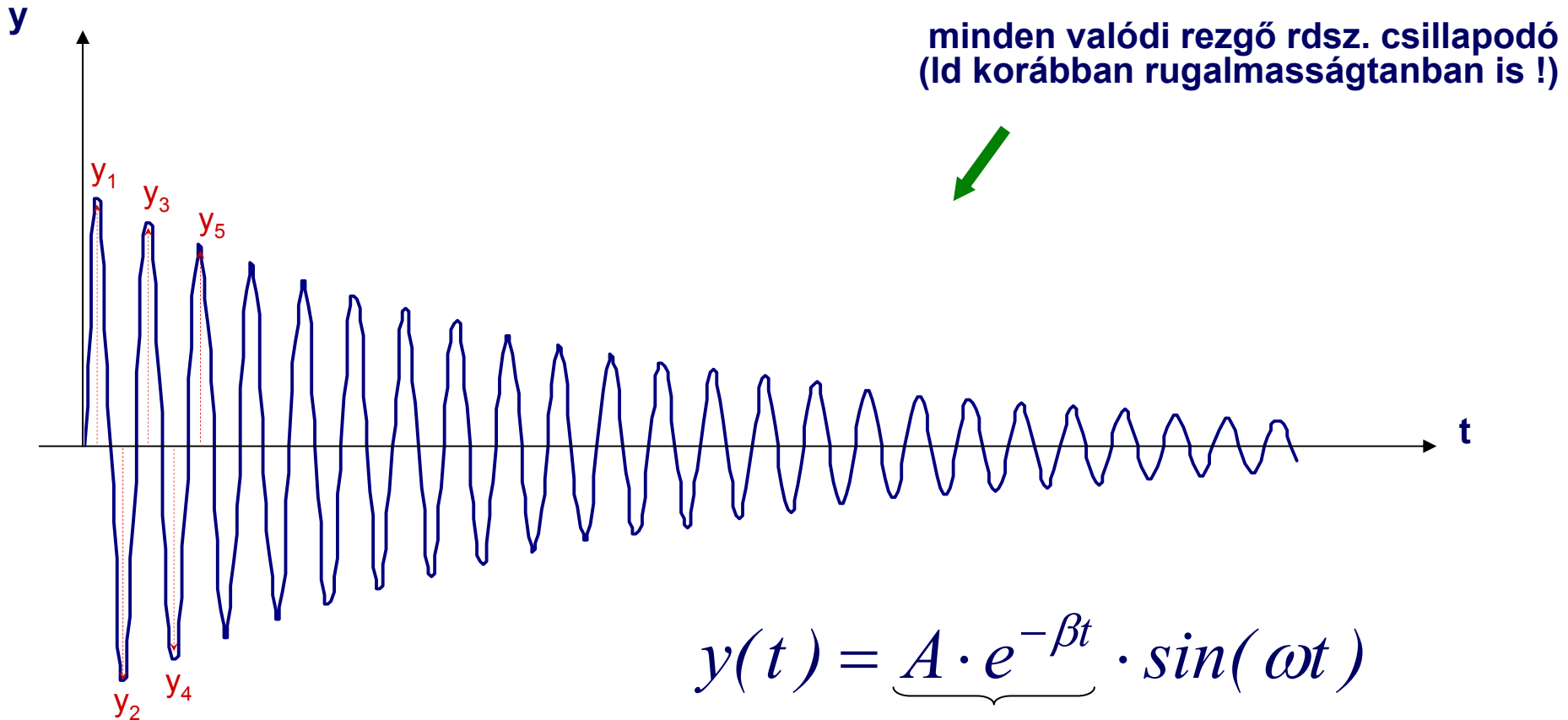
Fourier-analízis

$$x(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots$$

csillapodó rezgés : ha van csillapodás :

Kísérlet : rúgón rezgő test vagy fonálon lengő test papírkoronggal fékezve

$$\beta = 0.1$$



$$y(t) = \underbrace{A \cdot e^{-\beta t}}_{A = A(t)} \cdot \sin(\omega t)$$

$$A = A(t)$$

az amplitúdó az idővel exp. csökken

csillapodási hányados :

$$K = \frac{y_1}{y_3} = \frac{y_2}{y_4} = \frac{y_3}{y_5} = \dots$$

β = csillapítási tényező

$$A = A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}$$

$$K = \frac{y_1}{y_3} = \frac{A \cdot e^{-\beta t_1} \cdot \sin \omega t_1}{A \cdot e^{-\beta(t_1+T)} \cdot \sin \omega(t_1+T)} = \frac{e^{-\beta t_1}}{e^{-\beta(t_1+T)}} = e^{\beta T}$$

a logaritmikus dekrementum: $D := \ln K = \beta T \quad \longrightarrow \quad \beta = \frac{\ln K}{T}$

rúgón rezgő test + súrlódás vagy közegellenállás mozgásegyenlete :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \end{array} \right\} \longrightarrow -D \cdot y(t) - k \cdot \frac{dy(t)}{dt} = m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

pl. $6\pi\eta r$ (Stokes-törv.)

$$-\frac{D}{m} \cdot y(t) - \frac{k}{m} \cdot \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

$$\uparrow$$

$$\omega_0^2$$

$$\uparrow$$

$$\beta = \frac{k}{2m}$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot y(t) = 0$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot y(t) = 0$$

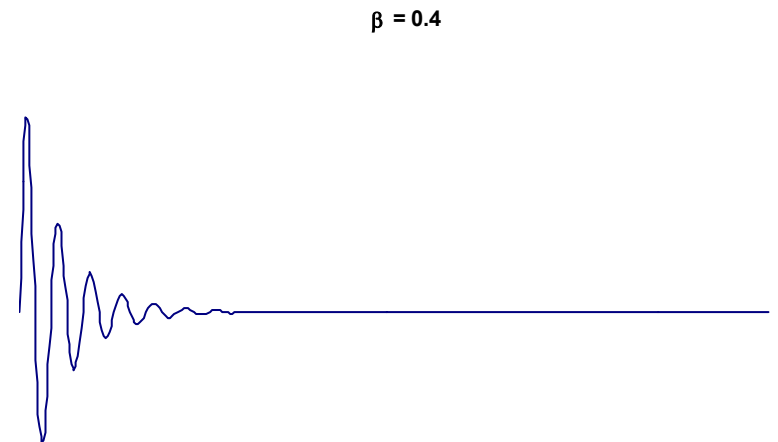
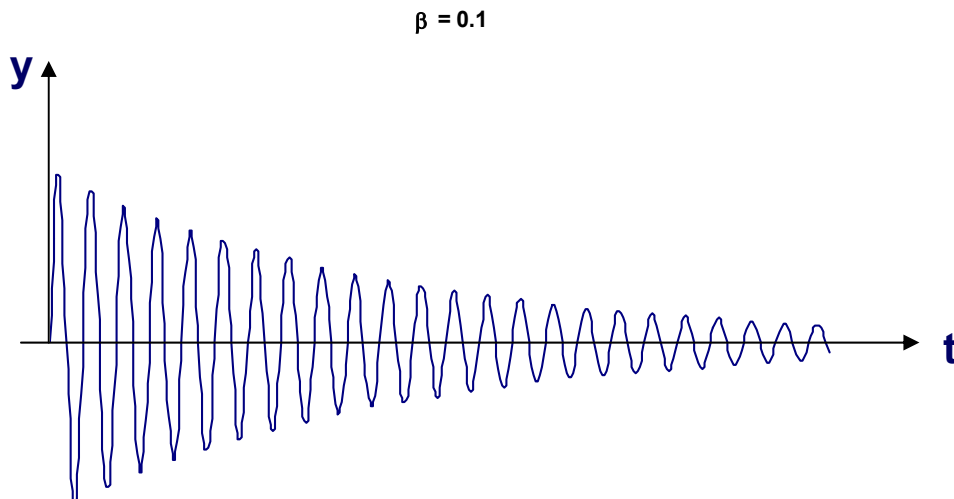
ha $\beta = 0 \longrightarrow$ csillapítatlan rezgés

$\beta < \omega_0$ – ra a megoldás : $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

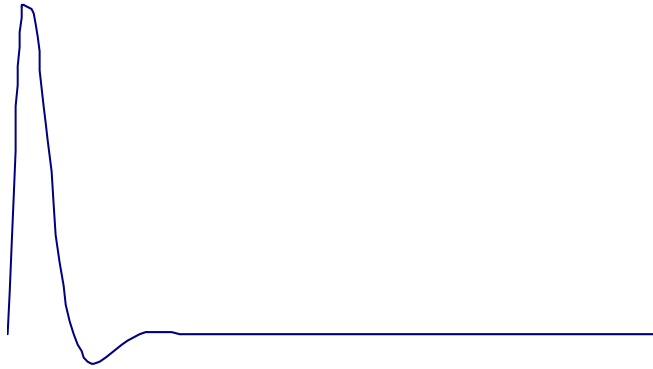
ezzel az ω -val a rúgón csillapítással rezgő testre éppen $y(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t)$

ha β nő $\longrightarrow \omega$ csökken $\longrightarrow T$ nő : $T = T_0 \sqrt{1 + \frac{D^2}{4\pi^2}}$

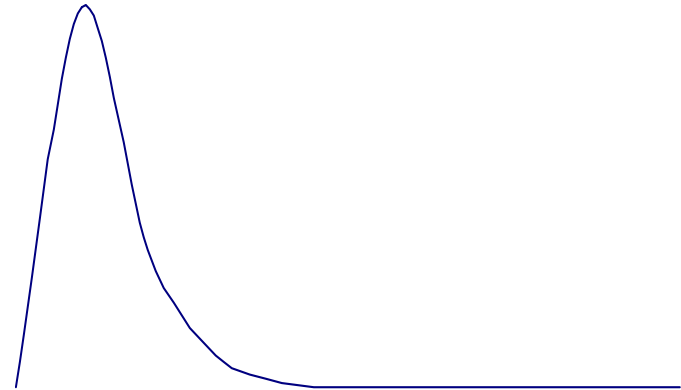
β növelésével (pl. nem levegő fékez, hanem víz, olaj, stb...) :



$\beta = 5$



$\beta = 15$



ha β elég nagy $\longrightarrow$ nem lesz periodikus
aperiodikus határeset !
ha $\beta = \omega_0$

ha $\beta > \omega_0$ $\longrightarrow$ aperiodikus mozgás

kényszerrezgés :

gerjesztés : ha az energiaveszteséget pótoljuk

kísérlet : kényszerrezgés, rezonancia, Fizikai kísérletek 3. CD, 23'00"

ha a gerjesztő frekv. megegyezik a sajátfrekvenciával

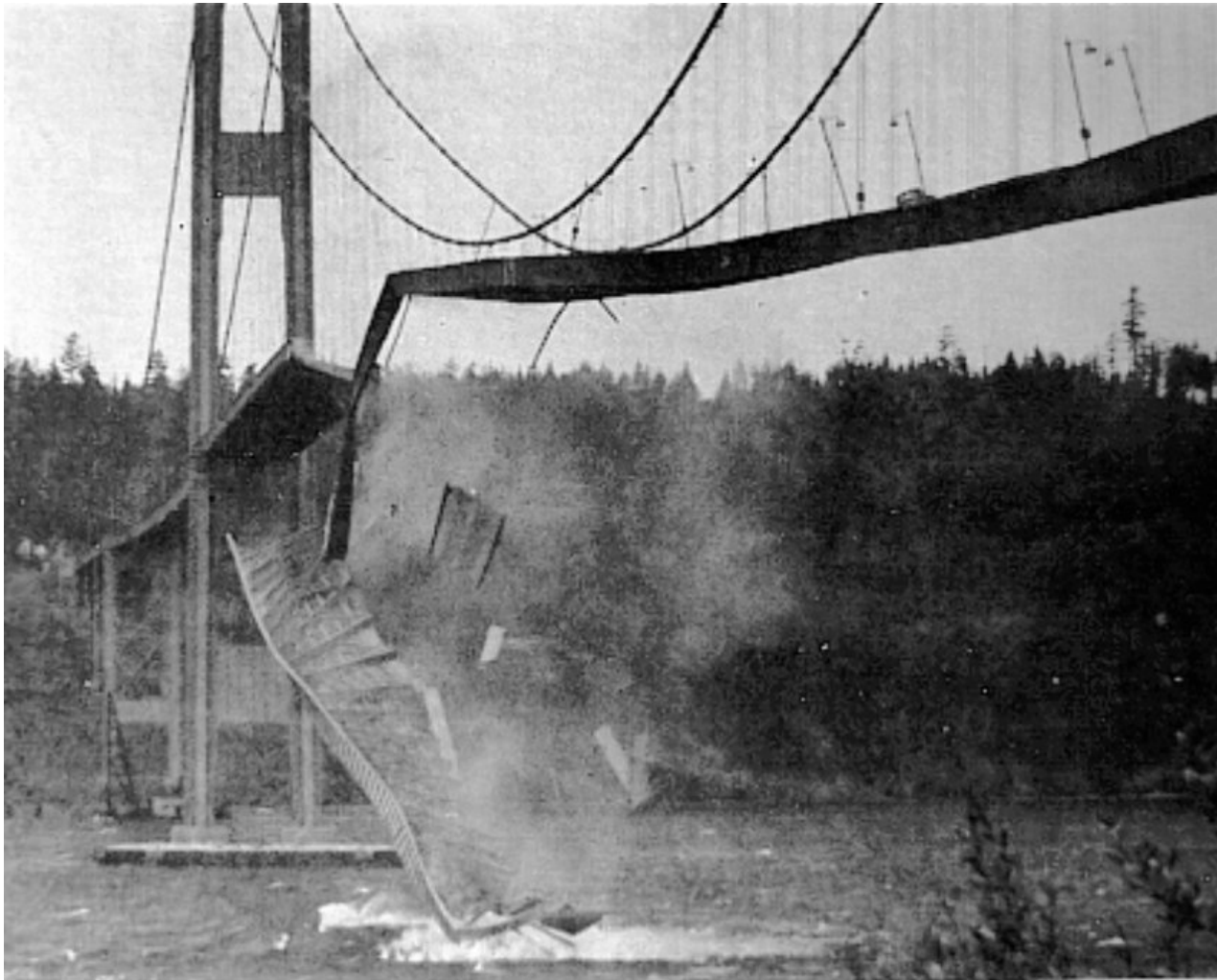
rezonancia : amplitúdó nagyon megnőhet : $\longleftarrow$

pl.: hinta lengetése : kicsi lökések → nagyon nagy amplitúdó

busz berezonál, ha a motor alapjárata nagyon alacsony

Tacoma híd katasztrófája : gyenge oldalirányú széllelkések éppen megfelelő ütemben

↪ **video**



kísérlet : rezonáns hangvillák, Fizikai kísérletek 3. CD: 25'48"

rúgón rezgő test + fékezés + gerjesztés :

$$F = -D \cdot y - k \cdot v + F_0 \sin \omega t$$

$$F = m \cdot a$$

↑
gerjesztőerő

$$\left. \begin{array}{l} F = -D \cdot y - k \cdot v + F_0 \sin \omega t \\ F = m \cdot a \end{array} \right\} \longrightarrow -D \cdot y(t) - k \cdot \frac{dy(t)}{dt} + F_0 \cdot \sin \omega t = m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

↑
 $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$

↑
 $2\beta = \frac{k}{m}$

↑
 $a_0 = \frac{F_0}{m}$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot y(t) = a_0 \cdot \sin \omega t$$

megoldás :

amplitúdó :

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$



max. amplitúdó :

$$A_{\max} = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_r^2)^2 + 4\beta^2 \omega_r^2}}$$

fáziskésés :

$$\delta = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

pl rúgón rezgő testre :

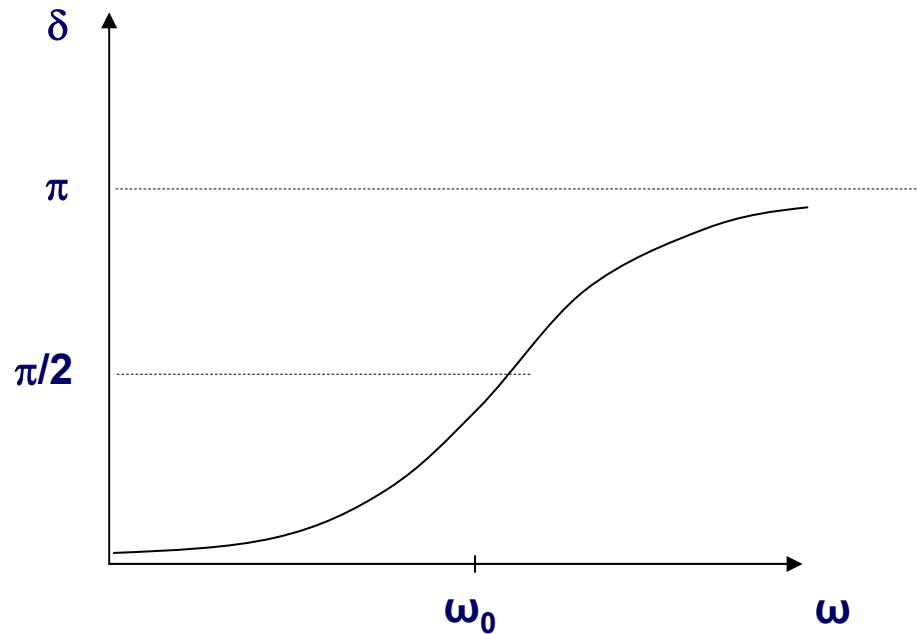
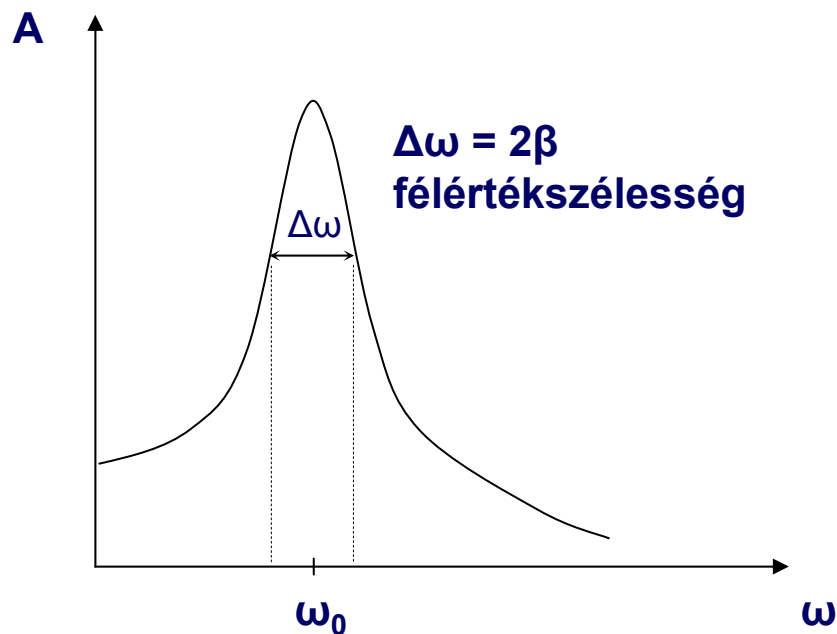
sajátfrekvencia : $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

rezonanciafrekvencia : $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

max. amplitúdó : $A_{\max} = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_r^2)^2 + 4\beta^2 \omega_r^2}}$

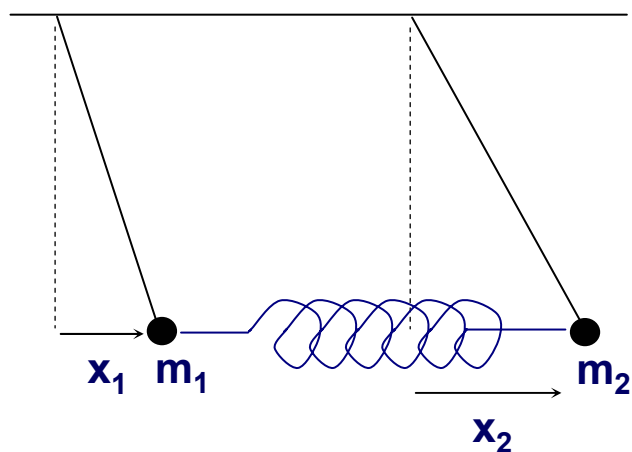
fáziskésés : $\delta = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega_r^2}$

jósági tényező : $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$ („jó” a rezgő rdsz. ha a szélessége kicsi ω_0 -hoz képest)



csatolt rezgések :

kísérlet : csatolt ingák, Fizikai kísérletek 3. CD: 27'39"



$$m_1 \cdot a_1 = -D_1 \cdot x_1 + c \cdot (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \cdot a_2 = -D_2 \cdot x_2 - c \cdot (x_2 - x_1)$$

ha $\omega_{1_0} = \sqrt{\frac{D_1}{m_1}}$ $\omega_{2_0} = \sqrt{\frac{D_2}{m_2}}$

$$c_1 = \frac{c}{m_1} \quad c_2 = \frac{c}{m_2}$$

csatolási tényezők

szoros csatolás,
laza csatolás

rezgések felbontása :

Fourier-analízis :

minden periodikus, nem harmonikus folyamat (rezgés) felírható olyan sin – és cos – rezgések összegeként, melyek frekvenciája az alaprezgés frekv.-nak egész számú többszöröse (Fourier tétele) :

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + A_2 \sin 2\omega t + B_2 \cos 2\omega t + \dots$$

↑
Fourier-együtthatók

↑
 $2\omega, 3\omega, \dots$ = felharmonikusok

kísérlet : **Fraknói ingák, Fizikai kísérletek 3. CD: 32'10"**

hullámok:



- mechanikai
 - rugalmas közeg
 - zavar-keltő tárgy
 - (a közeg egy részecskéjét rezgőmozgásba hozza)
 - hullám: a rezgésállapot
- elektromágneses
 - közeg nem szükséges
 - hullámforrás
 - (változó elektromágneses teret hoz létre)
 - terjedése a térben

lökéshullám : egyszeri gerjesztés → a zavar végigfut a közegen

harmonikus hullám : időben periodikus (szinuszos) gerjesztés

kísérlet : lökéshullám végigfutása kifeszített gumikötélen vagy csavarrúgón
Id. még : Fizikai kísérletek (Televideo) CD, hullámok terjedése : 8'40" - től

hullám különböző kiterjedésű közegekben :

vonalminti → **1D**

felületi → **2D**

térbeli hullámok → **3D**

hullámfajták :

**transzverzális, longitudinális,
torziós (csavarási) hullám
síkhullám, gömbhullám,**



Microsoft
PowerPoint bemutató

H

V

R

S

polarizáció : elliptikusan-, cirkulárisan-, síkban poláros hullám

kísérlet : polarizáció kötélén haladó hullámokkal

hullámterjedés : $x = c \cdot t$, c = fázissebesség

hullámfüggvény : $y = A \cdot \sin \omega t$

$$y = A \cdot \sin \omega(t - t^*)$$

$$t^* = \frac{x}{c}$$

$$y = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{c \cdot T} \right)$$

$$\Psi = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \longleftarrow \text{a közeg gerjesztése}$$

$$\Psi = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0) \quad \longleftarrow \text{haladó hullám hullámfüggvénye}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

periodicitások :

x = állandó



időbeli periódikusság : T

t = állandó



térbeli periódikusság : $c \cdot T = \lambda$ hullámhossz

Doppler-effektus :

pl. : vonattal (szirénázó mentőautóval,...) szemben haladva a vonatduda hangja magasabb, ha már távolodunk, akkor mélyebb

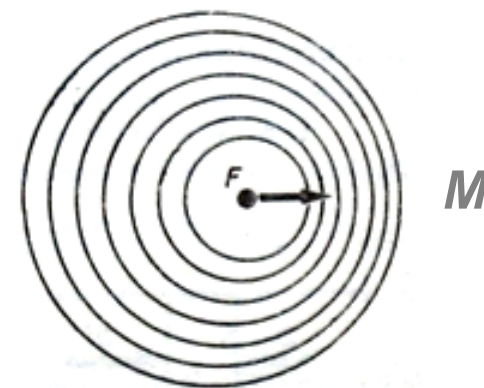
ha a hullámforrás (F) és/vagy a megfigyelő (M) mozog :

ha csak a M mozog :

$$v' = v \cdot \left(1 \pm \frac{v_m}{c} \right)$$

ha csak a F mozog :

$$v' = \frac{v}{1 \mp \frac{v_f}{c}}$$



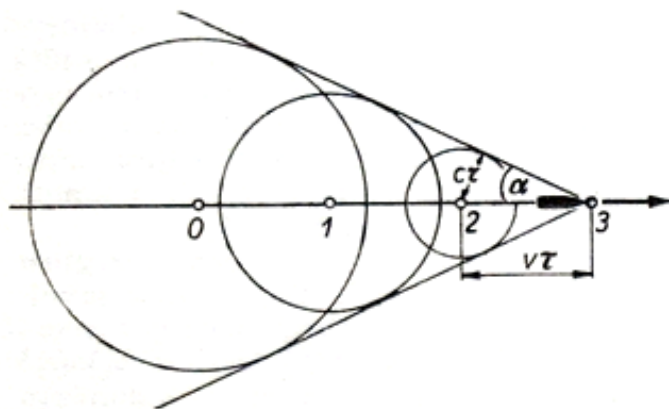
ha mindkettő mozog :

$$v' = v \cdot \frac{1 - \frac{v_m}{c}}{1 - \frac{v_f}{c}}$$

(v_f és v_m az $\overrightarrow{FM}$ irányában pozitív, ellentétes irányban negatív)

Id. még : Fizikai kísérletek (Televideo) CD, hullámok terjedése : 8'40" - től

hangrobbanás :



rugalmas hullámok kül. közegekben :

szilárd testekben, longitudinális hullámokra :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

transzverzális hullámokra (húrban) :

$$c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

gitár !

Kísérlet: monokord

folyadékokban : csak longitudinális hullámok lehetnek !!! :

E helyett a K-t lehet használni:

$$K = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}$$

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

(kompressziómodulus)

gázokban :

ha T = áll. :

$$c = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

(nem teljesen jó)

**gázban is csak longitudinális hullám !!!
(foly. és gázokban nincsenek nyíróerők)**

folyadékok felszíni hullámai :

(nincs rugalmas erő, a gravitáció és a kapillaritás okozza)

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot \alpha}{g \cdot \lambda}}$$

ha $h \ll \lambda$  $c = \sqrt{g \cdot h}$

hullámok összegződése, szuperpozíciója :

$$y_1 = A_1 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{x_1}{\lambda_1} \right)$$

$$y_2 = A_2 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_2} - \frac{x_2}{\lambda_2} \right)$$

az eredő hullám csak akkor lesz harmonikus, ha az összetevők koherensek egymással

koherencia = a találkozási pontban a hullámok fáziskülönbségeidőben állandó, azaz

$$T_1 = T_2 = T \text{ és } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A_1 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{x_1}{\lambda_1} \right) \\ y_2 &= A_2 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_2} - \frac{x_2}{\lambda_2} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

ahol

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

(párhuzamos rezgések összetétele)

szélső esetek :

max. az ampl., ha $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$ $\longrightarrow$ $A = A_1 + A_2$

az erősítés feltétele : $\underbrace{x_2 - x_1}_{\text{útkülönbség}} = n \cdot \lambda = 2n \cdot \frac{\lambda}{2}$ (n egész szám)

min. az ampl., ha $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$ $\longrightarrow$ $A = A_1 - A_2$

a gyengítés feltétele : $\underbrace{x_2 - x_1}_{\text{útkülönbség}} = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$

kioltás:
ha $A_1 = A_2$

haladó és visszaverődő hullámok találkozása :

(pl. : 1D hullám visszaverődése a kötéel végéről)

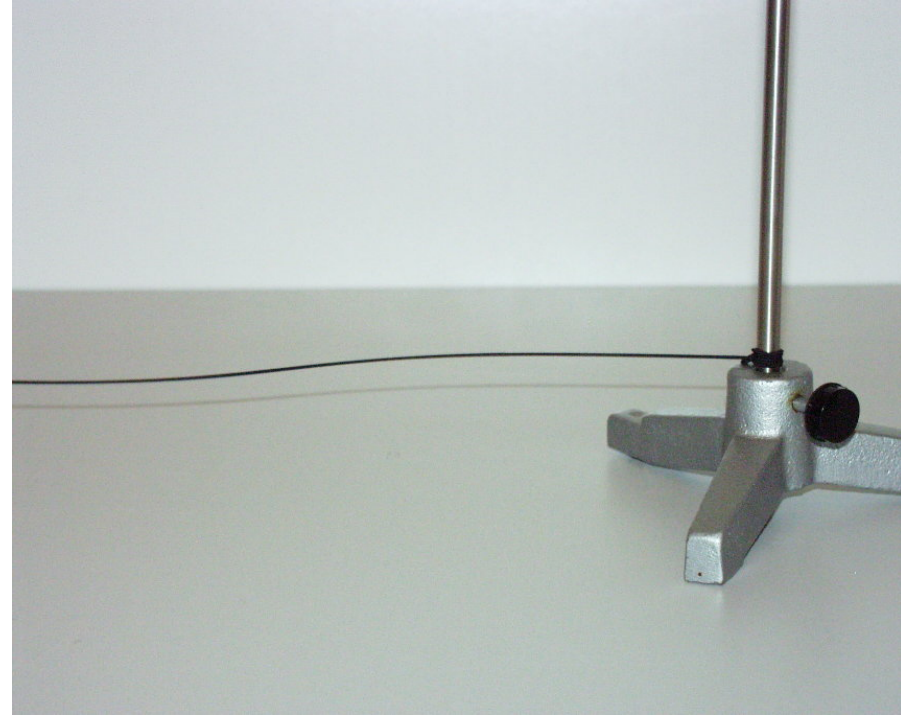
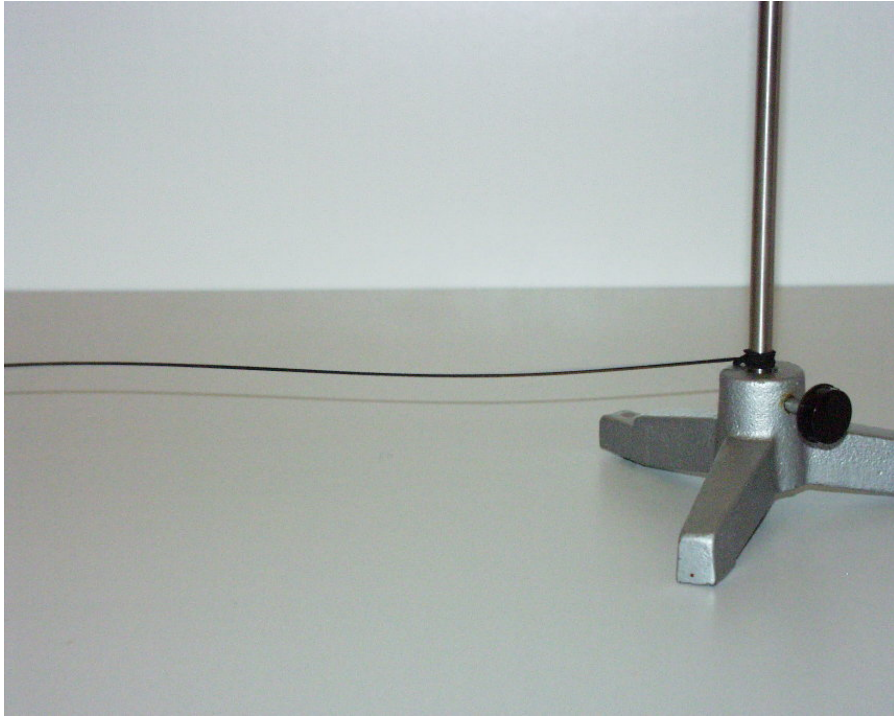
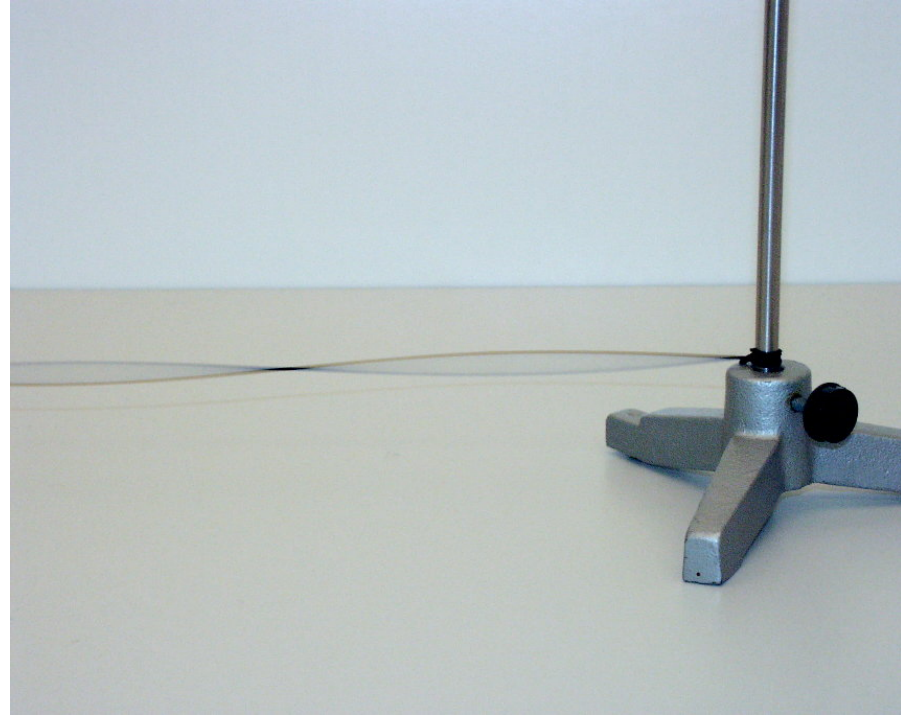
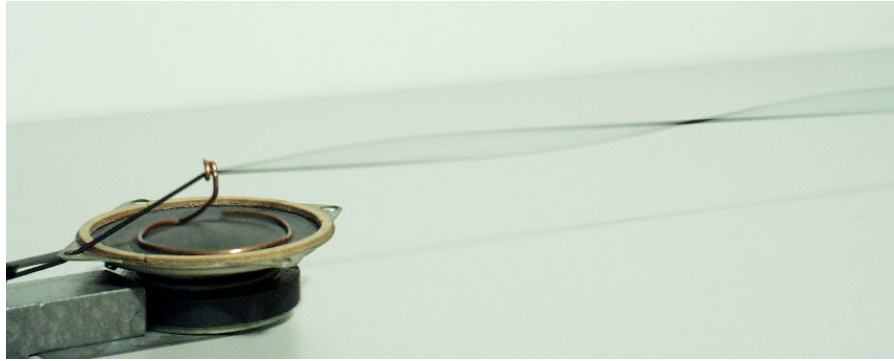
visszaverődés rögzített végről :

visszaverődés szabad végről :

ellentétes fázissal indul vissza

azonos fázissal indul vissza

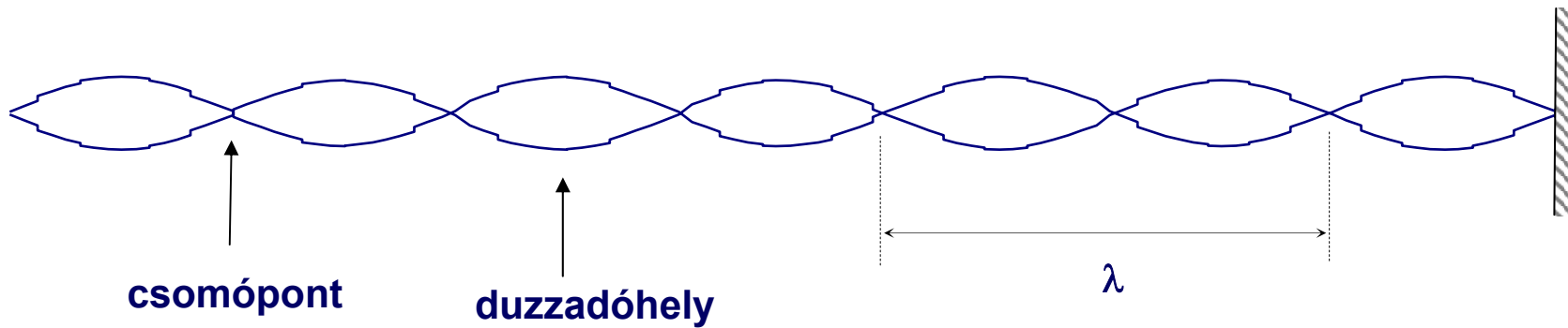
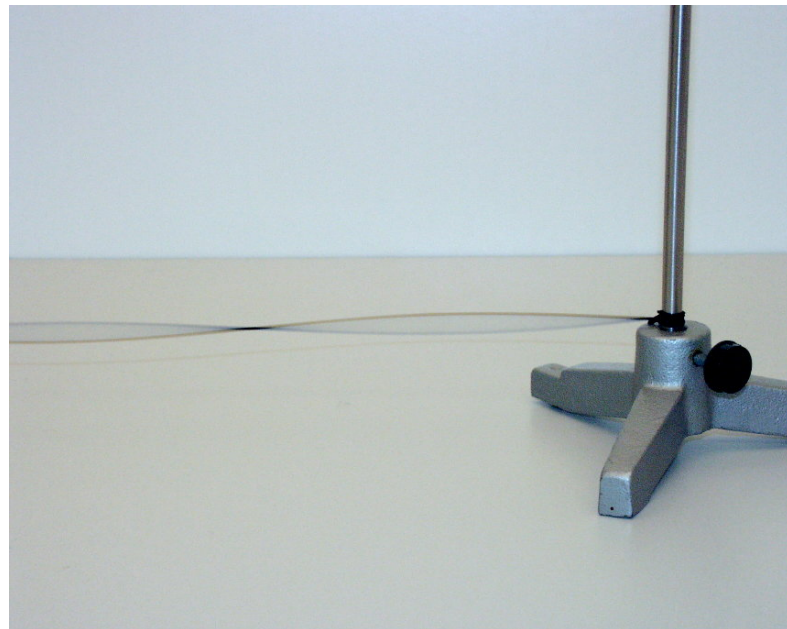
Kísérlet :



haladó és visszaverődő hullám találkozása



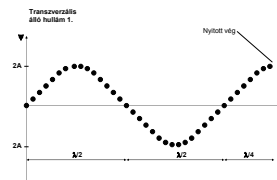
állóhullám :



csomópontok távolsága a rögzített/szabad végtől:



állóhullámok :



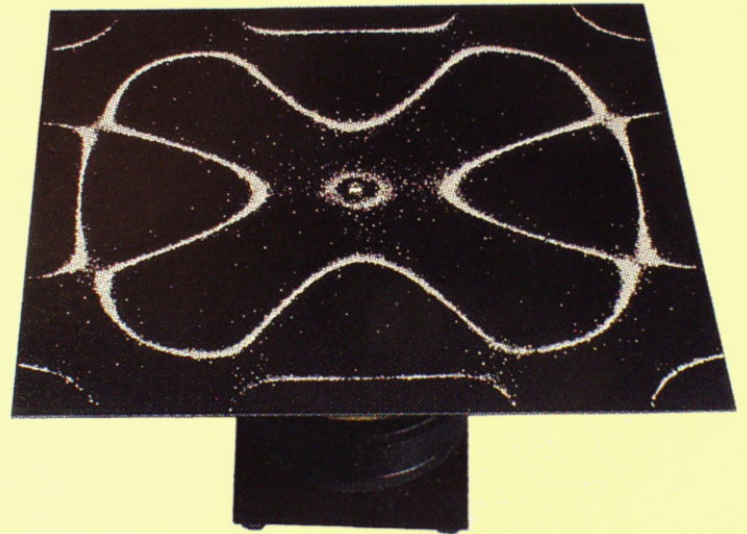
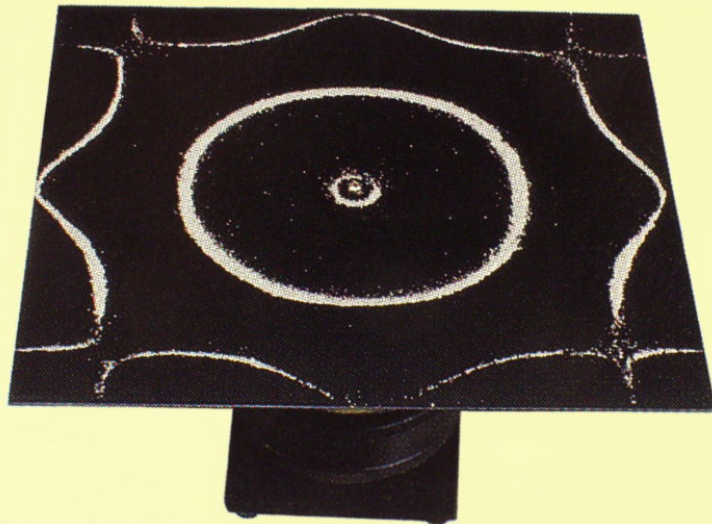
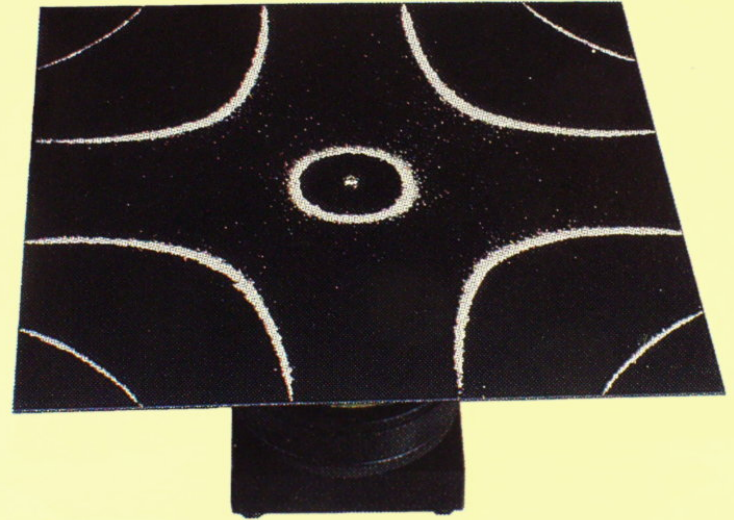




Kísérlet : Chladni-féle porábrák

lásd még : Fizikai kísérletek 3. CD: 39'12"

Kundt-cső : Fizikai kísérletek 3. CD: 35'20"



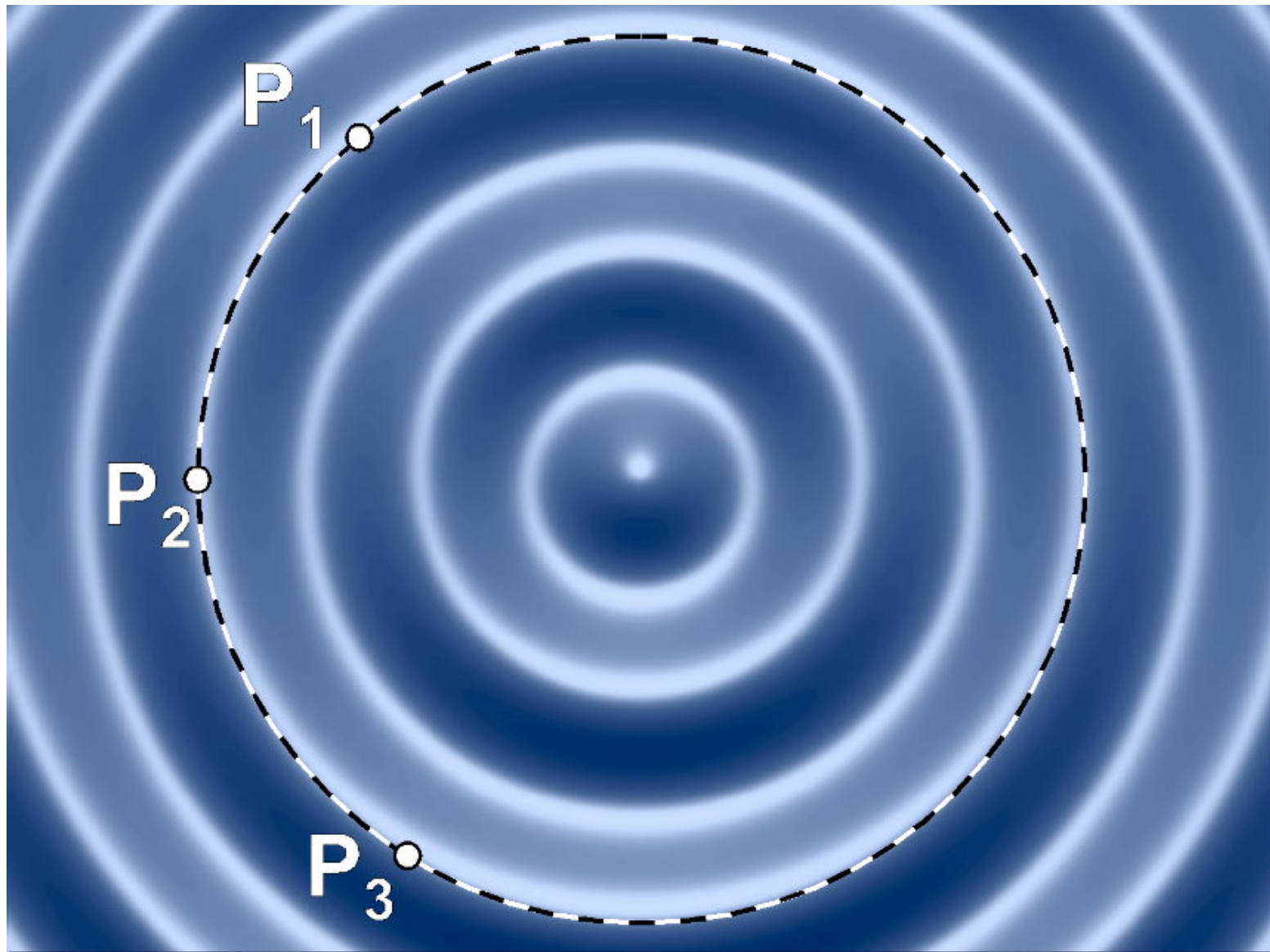
többdimenziós hullámok : pl. víz felületén ... (2D), hang (3D, pl. a robbanás)

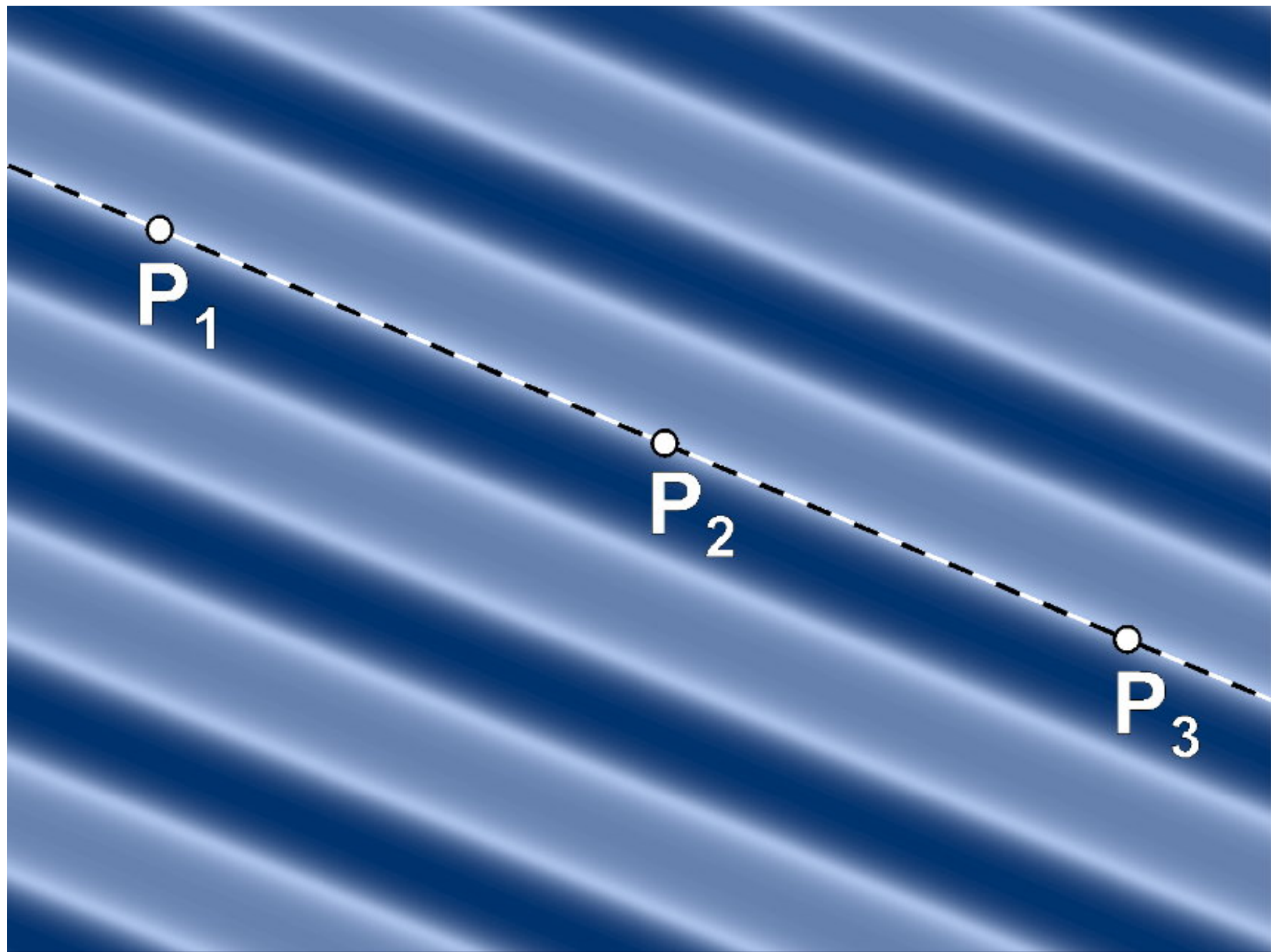
hullámjelenségek :

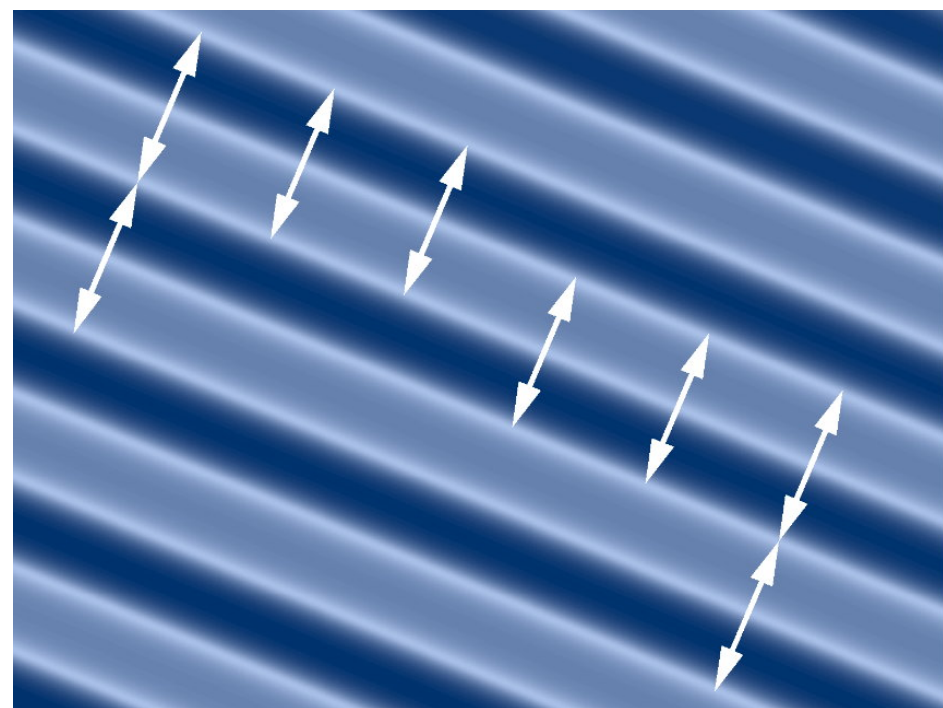
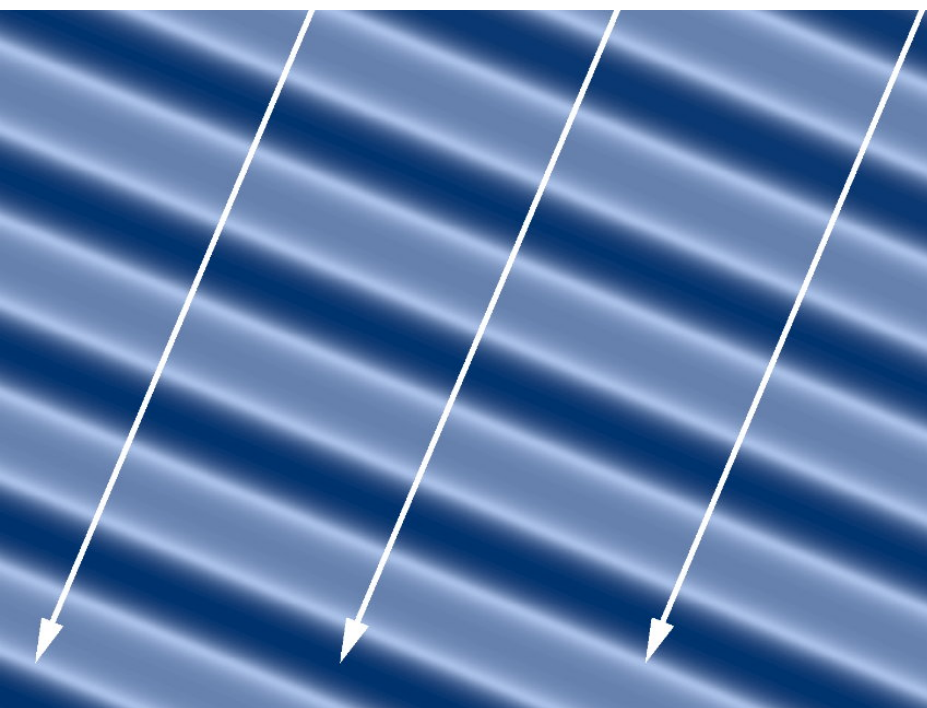
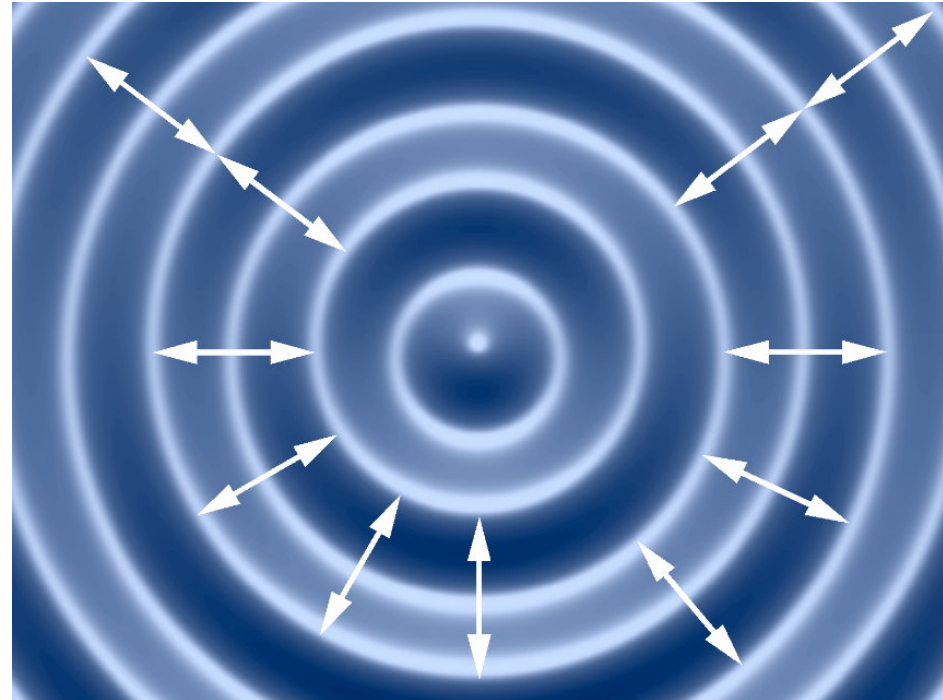
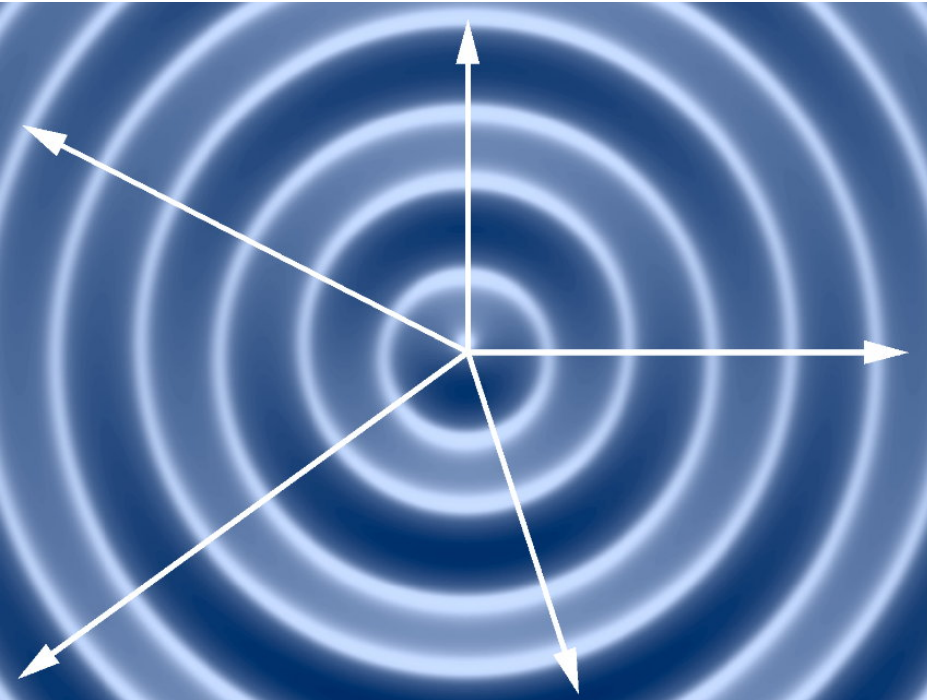


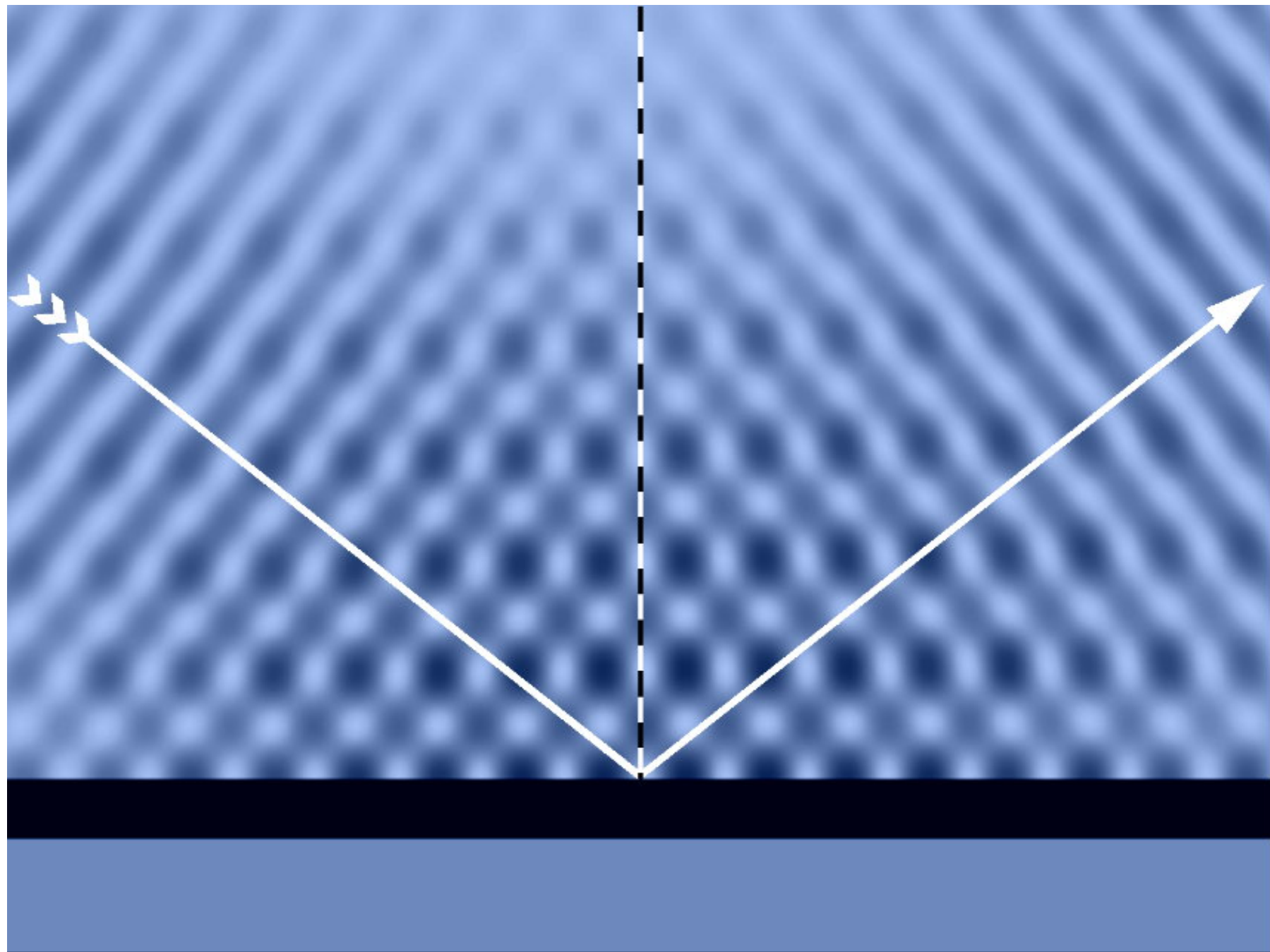
kísérlet : hullámkád

Id. még : Fizikai kísérletek (Televideo) CD, hullámok terjedése : 8'40" - től

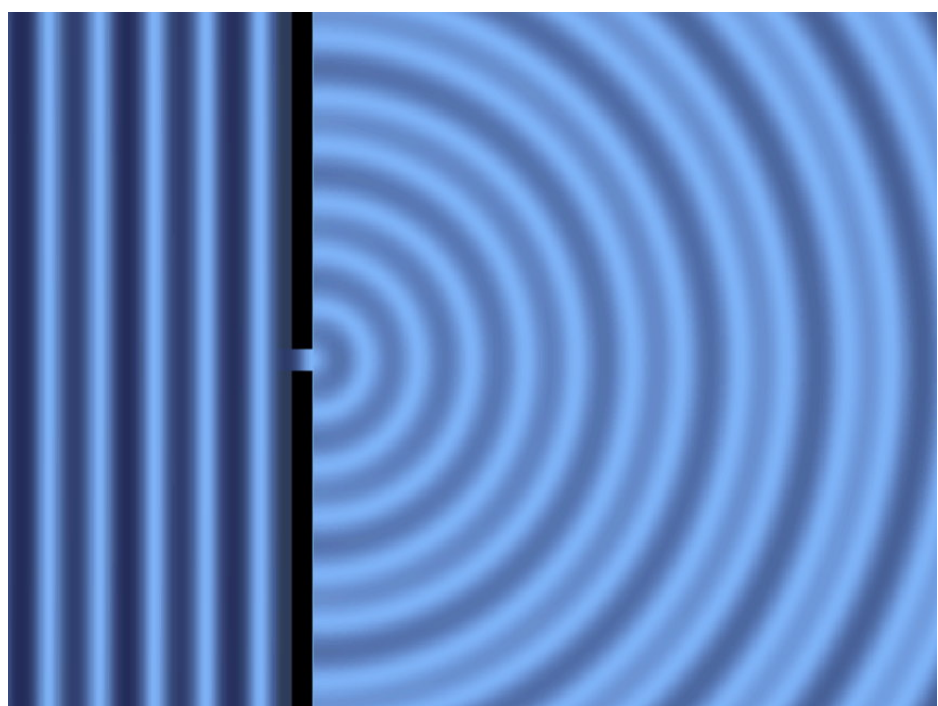
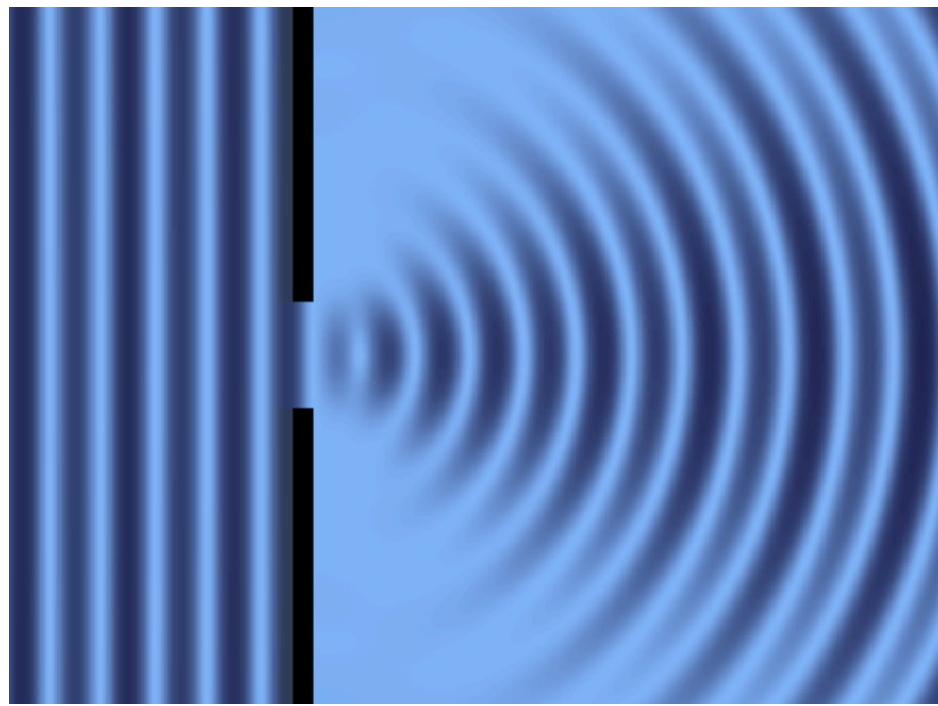
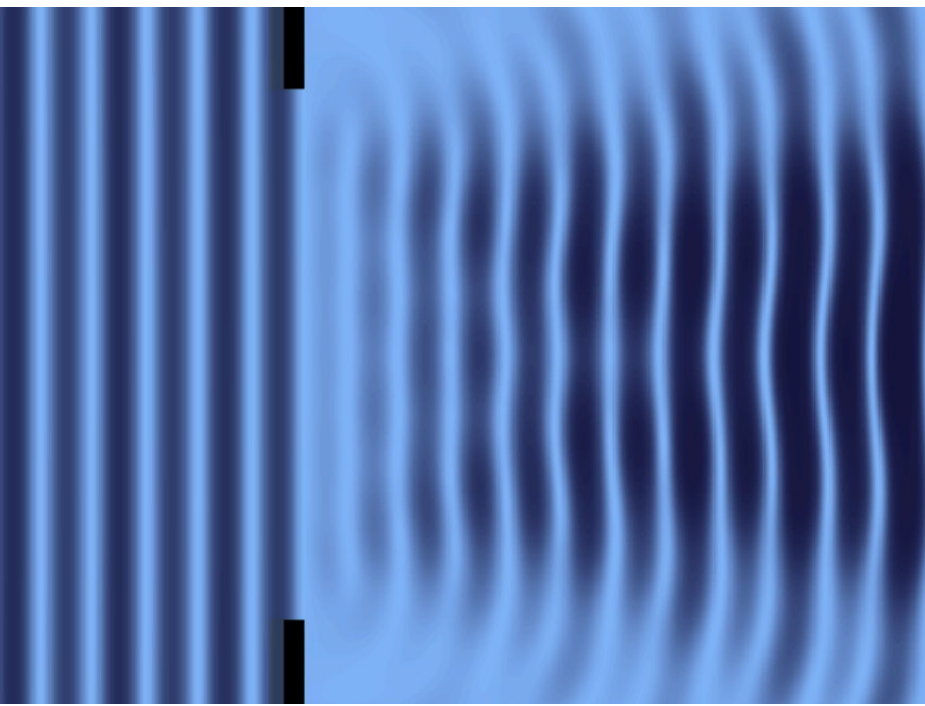


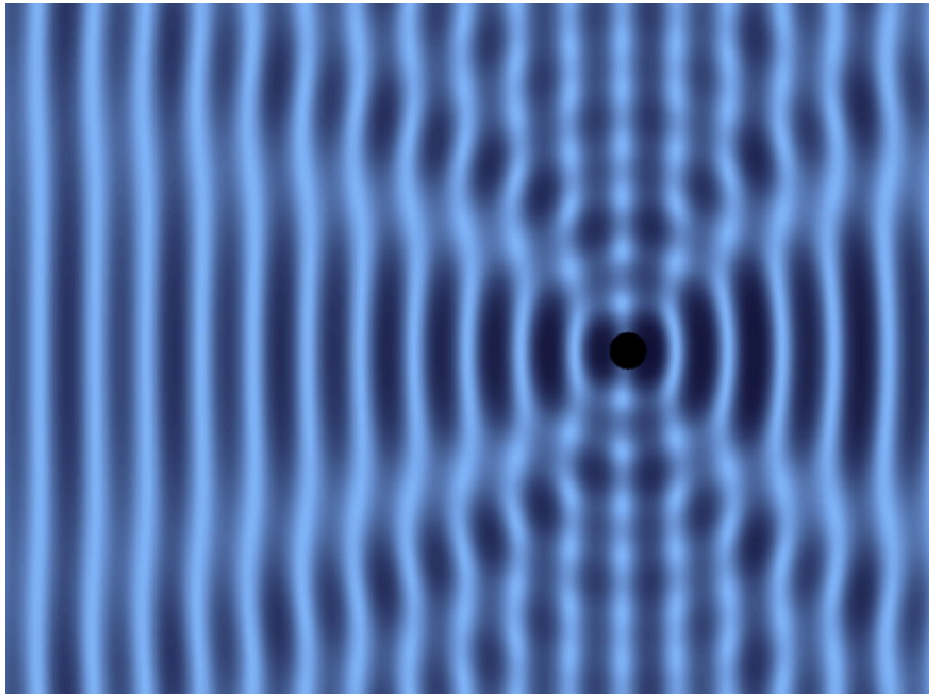
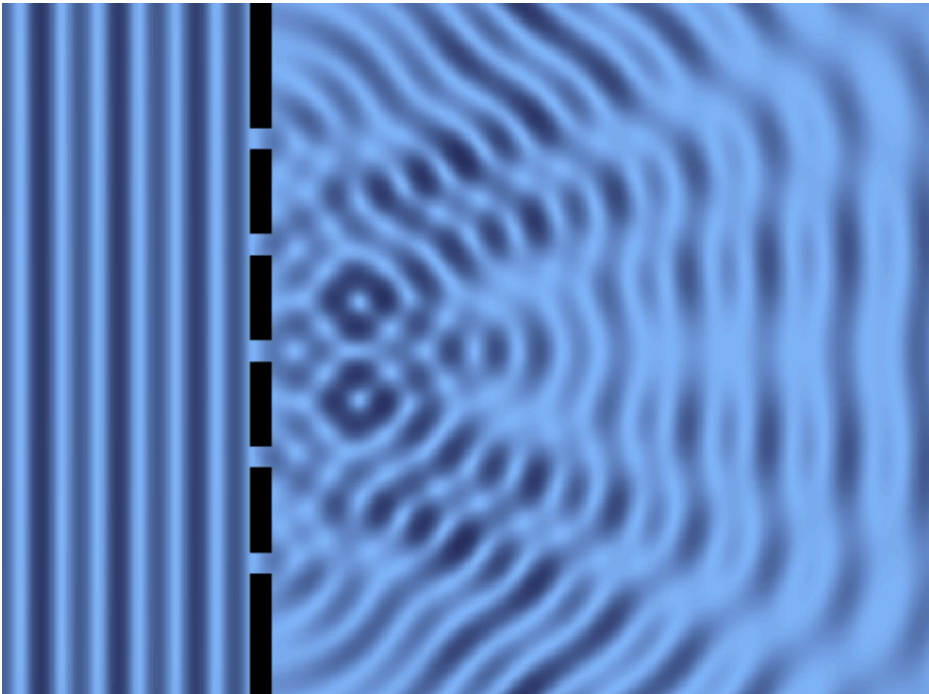
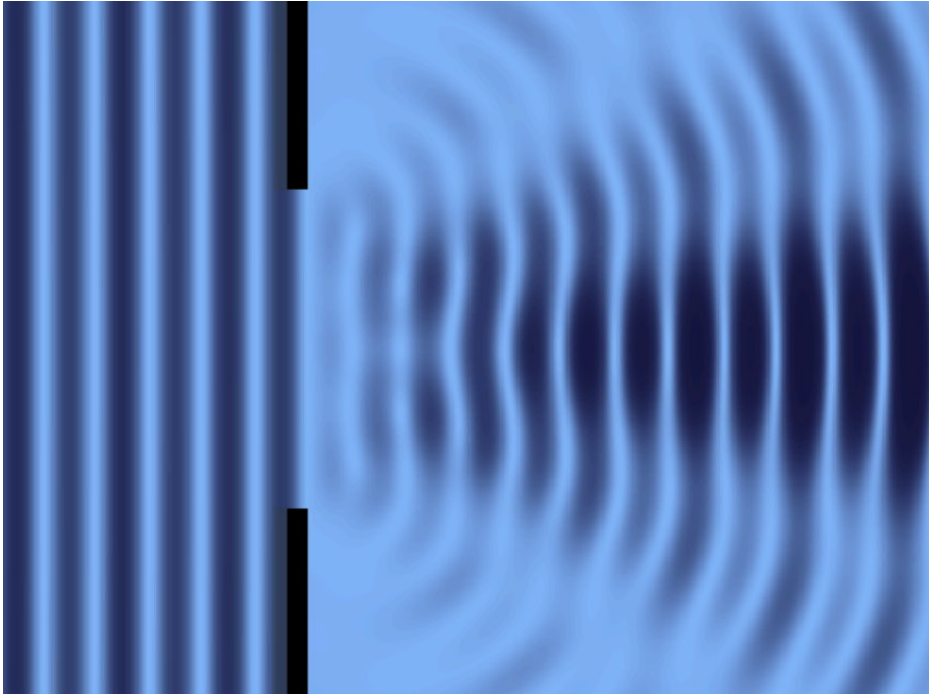
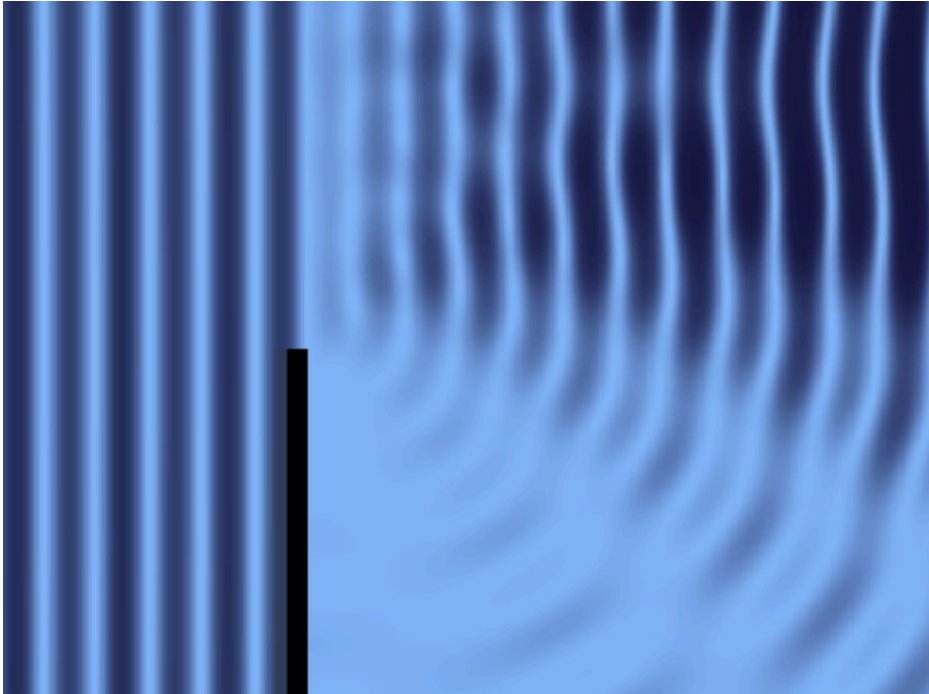


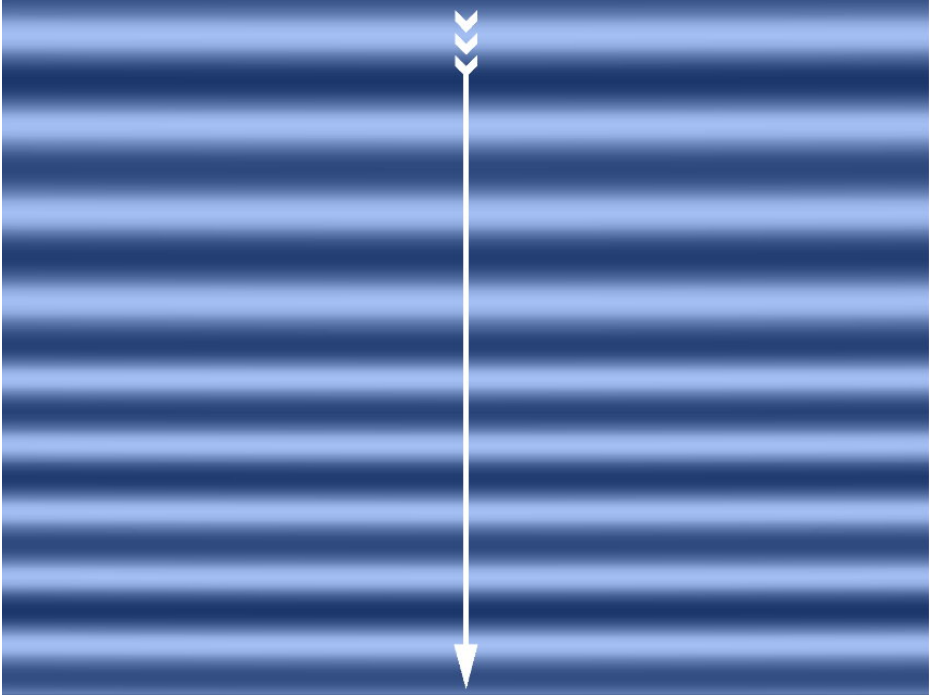
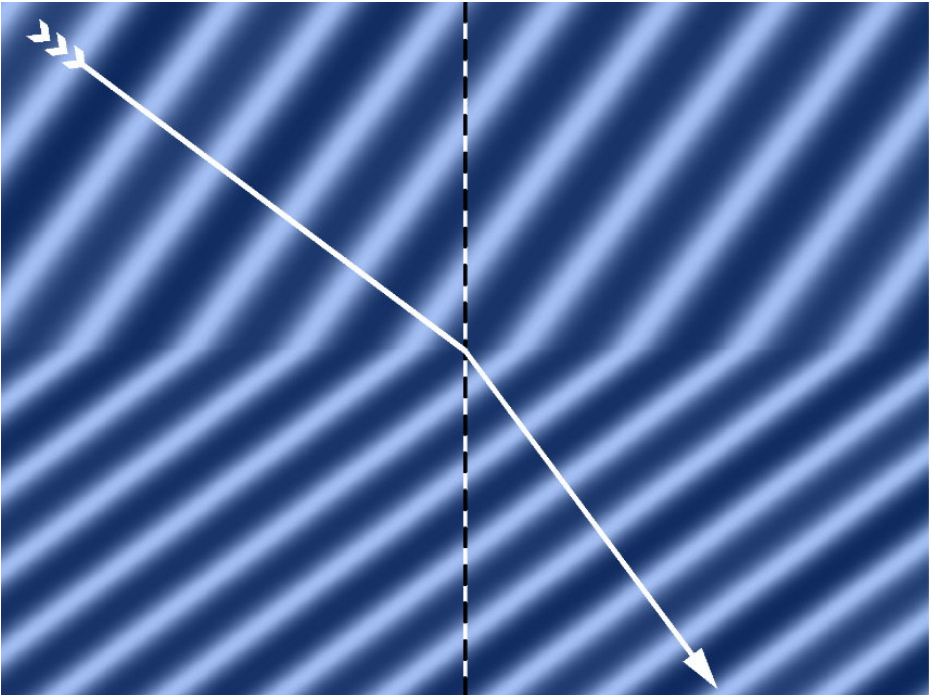




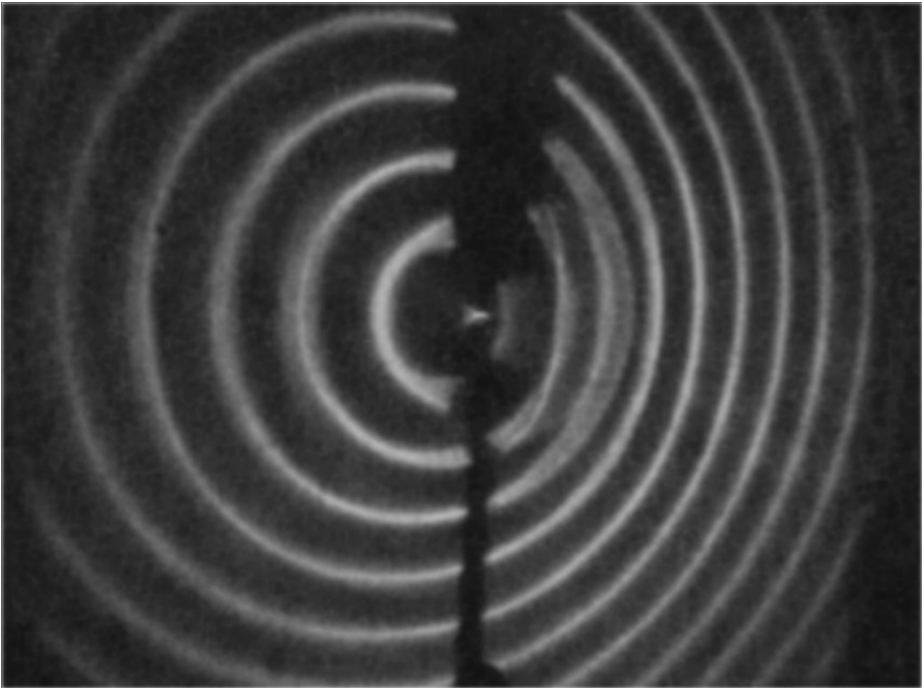




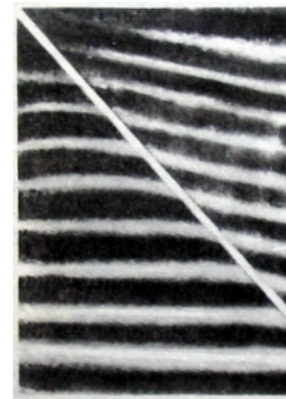
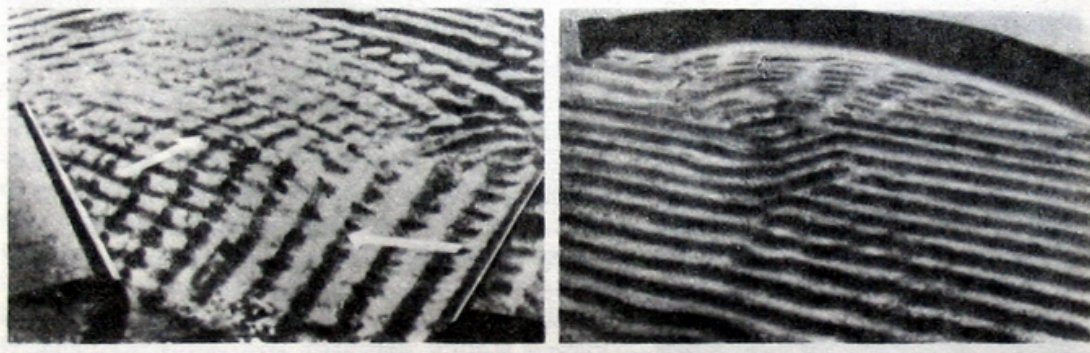
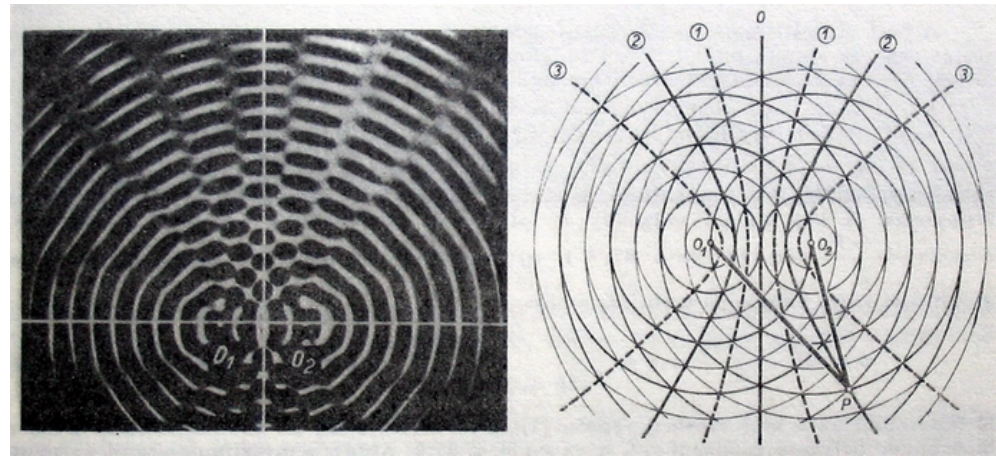
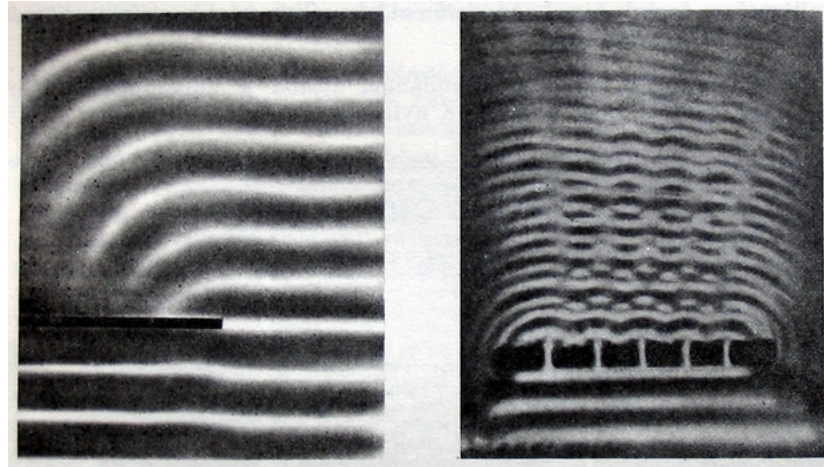
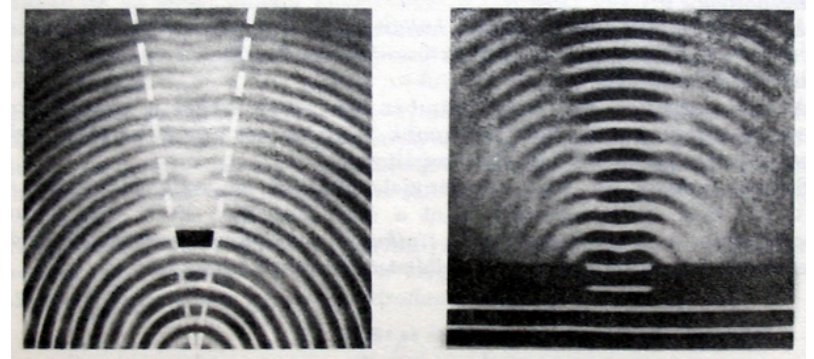
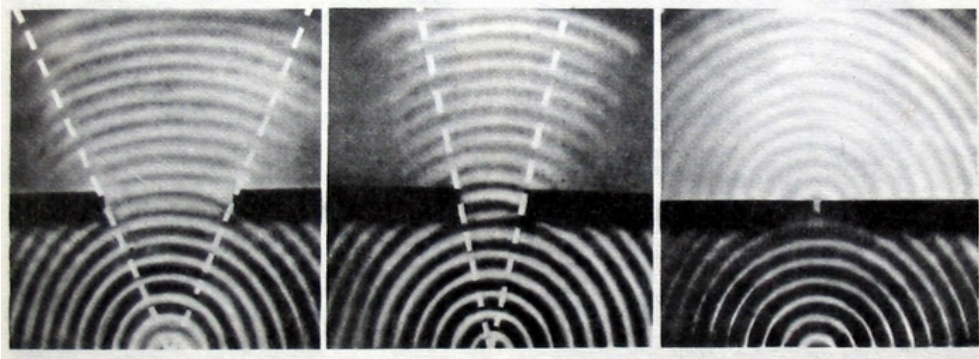




Doppler :



elhajlás, visszaverődés, törés, interferencia :



Kísérlet :

Fizikai kísérletek (Sulinet) CD :

állóhullámok

csatolt rezgések

hullámok a mélyben

lebegés bemutatása

longitudinális hullámok

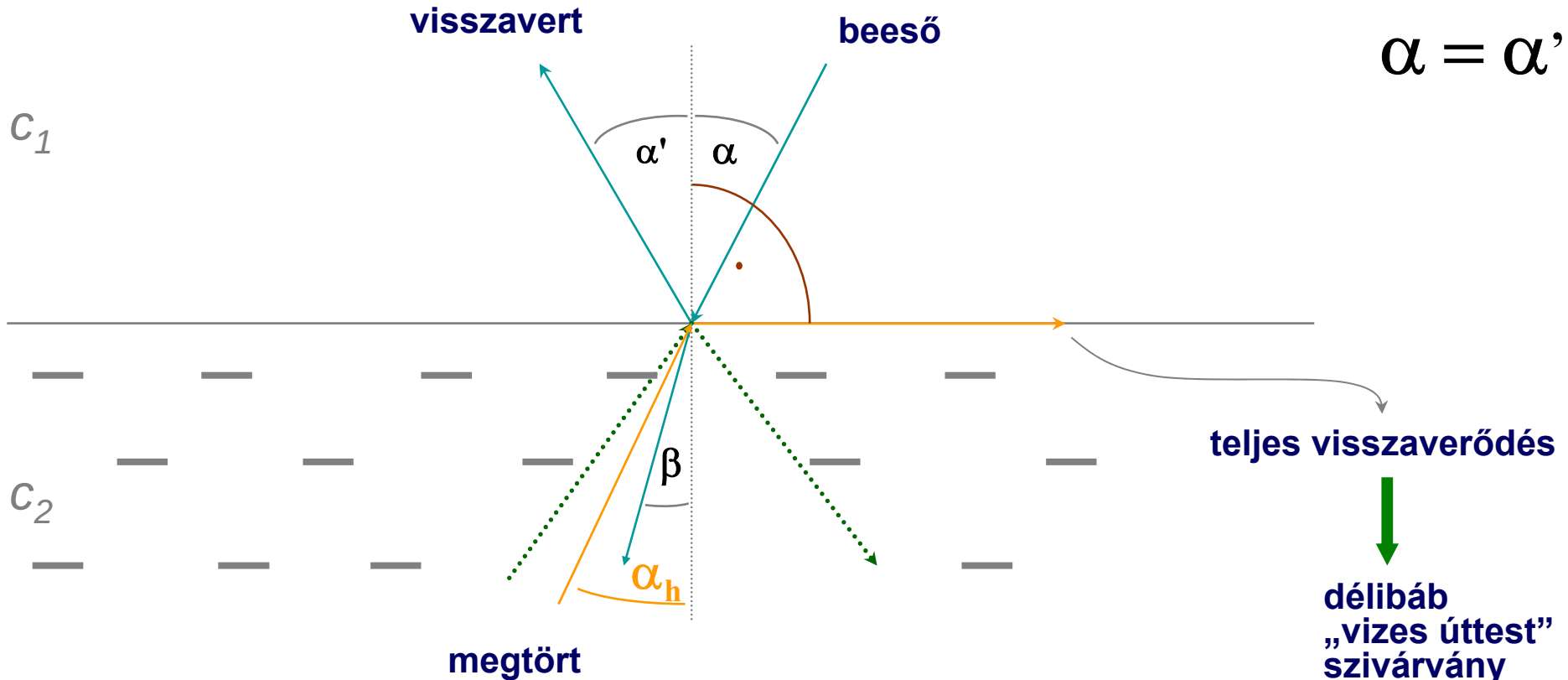
rezonancia

szökőár a konyhában

transzverzális hullámok

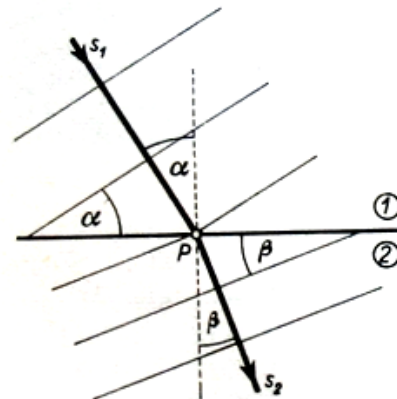
visszaverődésre :

$$\alpha = \alpha'$$



Snellius-Descartes-törv. :
törésmutató

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}$$



optika, stb...

többdimenziós hullámok :

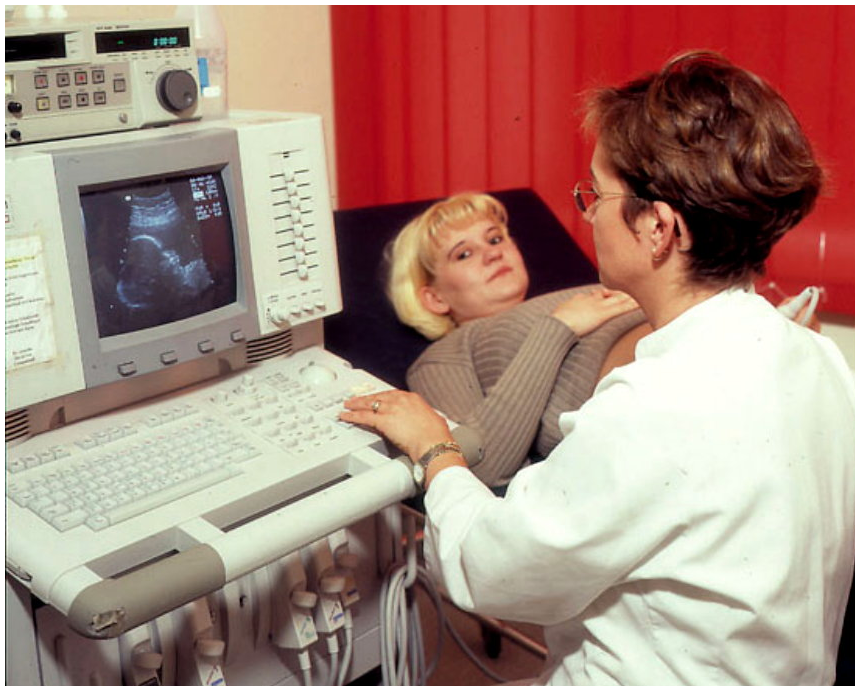
pl. víz felületén ... (2D), hang (3D, pl. a robbanás)

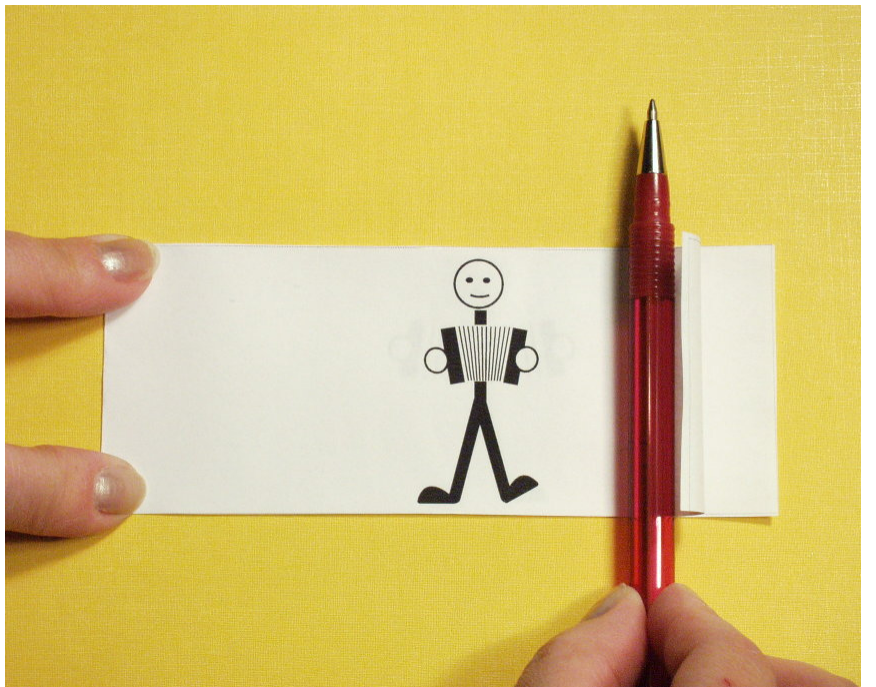
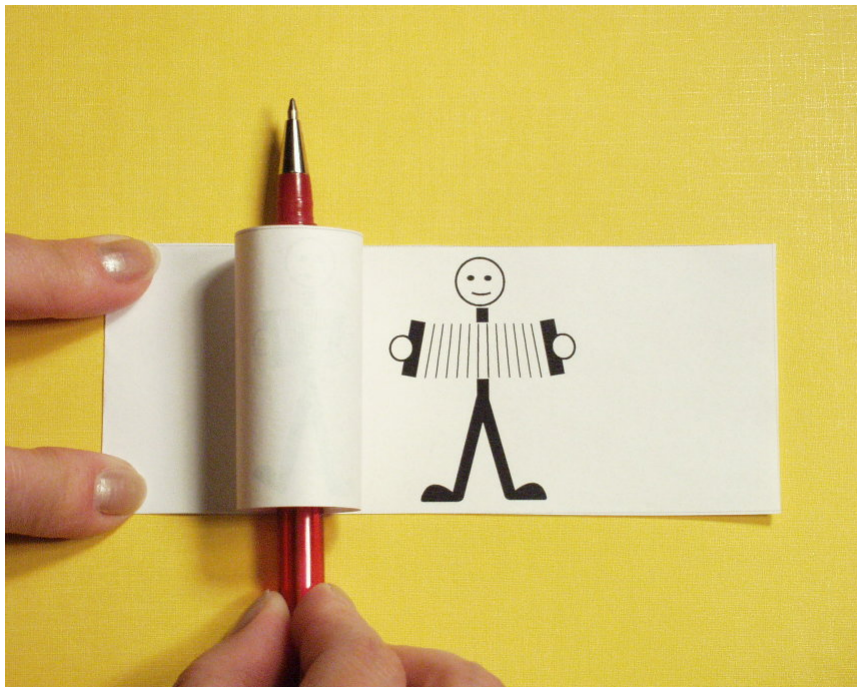
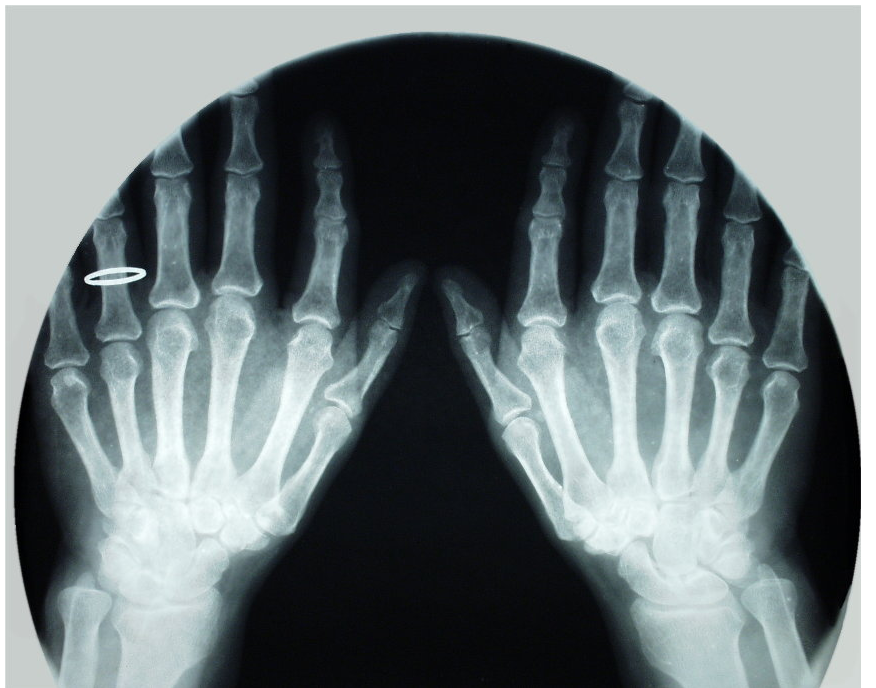
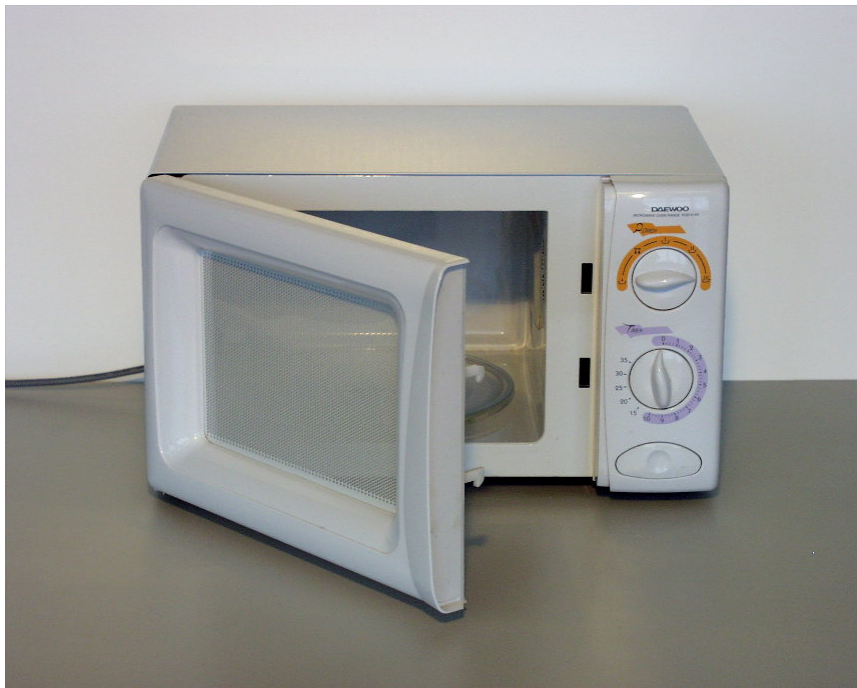
**elhajlás
visszaverődés
törés
interferencia**

**Snellius-Descartes-törv.
törésmutató**

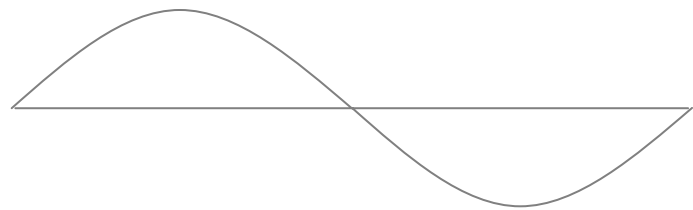
**Huygens-elv
Huygens-Fresnel-elv**

pl. : alkalmazások :

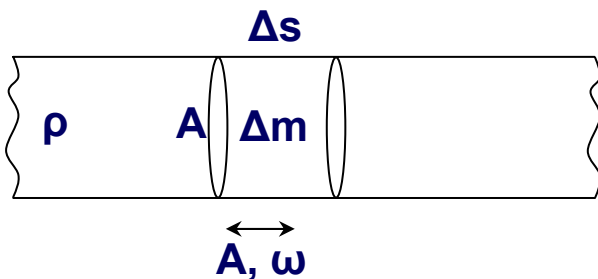




energiaterjedés hullámokban :



szélső helyzetben $v = 0$ és megnyúlás $= 0$



$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v^2 + \frac{1}{2} D \cdot y^2 \quad \left(D = \Delta m \cdot \omega^2 \right)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m \cdot (A \cdot \omega)^2 \cdot \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 \cdot (A \cdot \sin(\omega t))^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m \cdot A^2 \omega^2$$

energiasűrűség :

$$\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2$$

intenzitás = felületegységen időegység alatt átviramló energia :

$$(\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A \cdot \Delta s = \rho \cdot A \cdot c \cdot \Delta t)$$

$$I = \frac{\Delta E}{A \cdot \Delta t} = \frac{1}{2} \rho c A^2 \omega^2$$

hangtan :

3D hullámjelenség

rezgés → közvetítő közeg → fül
(rugalmas hullám)

Kísérlet :

közvetítő közeg = levegő → ha kiszivattyúzzuk, nem hallatszik :



vákuum-
szivattyú

hallható tartomány,
20 – 16000 Hz

infrahang,
20 Hz alatt

ultrahang
16kHz fölött



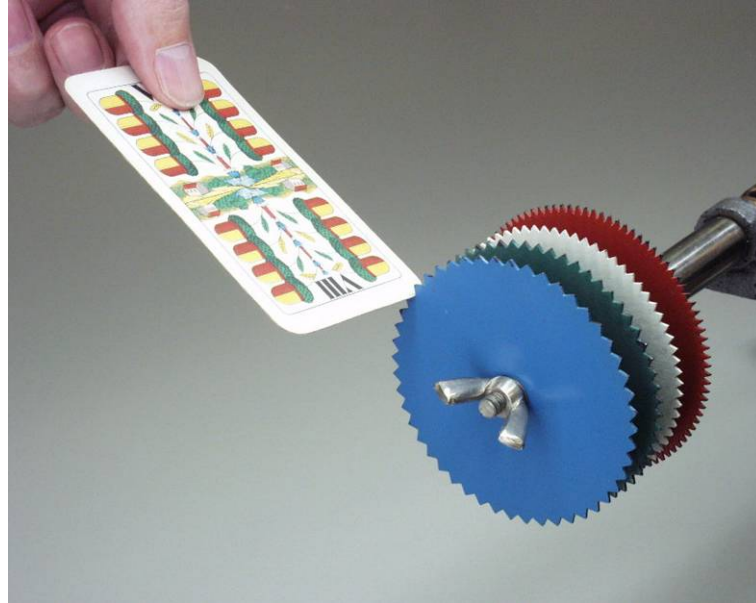
épületek ledöntése : rezonancia

hangforrások : szirénák
húros hangszerek (mint a megfeszített drót rezgései, állóhullámok)
sípok (nyitott, vagy zárt végű)

Kísérlet :

hangkeltés kártyával : →

vagy szirénával



hangmagasság : az alaprezg. frekv.-tól függ : nagyobb rezg.szám → magasabb hang
(Galilei)

két hang viszonylagos magassága = hangköz = f_1/f_2

2:1 arányú hangköz = **oktáv**

20-16000 Hz → 10 oktáv (beszéd $\approx$ 1 oktáv, zene $\approx$ 7 oktáv)

hangszín : alaphang + a felharmonikusok frekvenciája és erősségétől függ

hanglebegés :
$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \cdot \sin \omega_1 t \\ x_2 &= A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi) \end{aligned} \right\} \text{ és } \omega_1 \neq \omega_2$$

$$x = A(t) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

az ampl. változik az időben !!! :

ez a **lebegés**

lebegés frekv.-ja: $f = f_1 - f_2$

kísérlet : lebegés két dobozos hangvillával

a hang terjedése :

a terj. seb. függ a közegtől, hőm.-tól, nyomástól,...

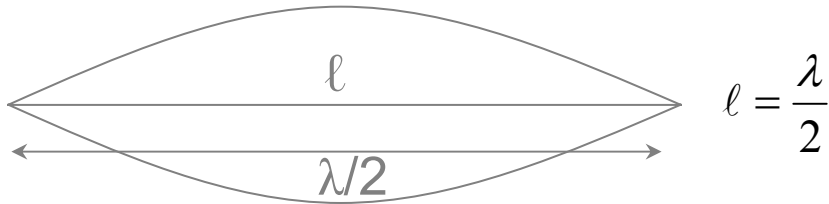
visszaverődés : visszhang, távolságmérés (pl. tengermélység, ultrahang denevér,...);

szócső, sztetoszkóp,...;

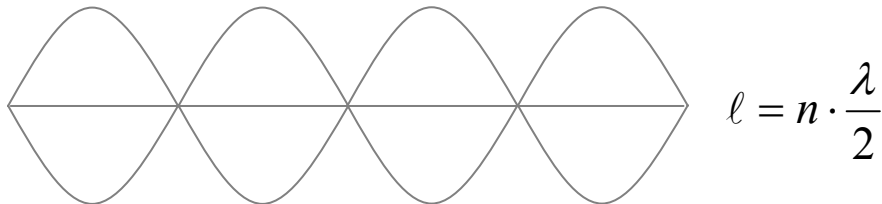
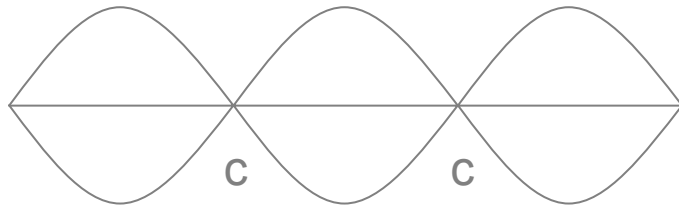
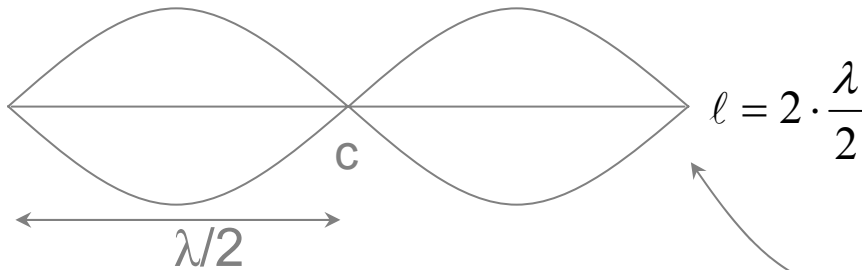
törés, elhajlás : a hang nagy táv.-ra is elhallatszik a földön : a kül. hőm.-ű levegőrétegekről visszaverődik;
pl. egy épületben mindenhol hallani a beszédet

húrok rezgései :

alaphang :



felhangok :



$$\ell = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = n \cdot \frac{c}{2\ell}$$

pl. : hegedű, ld. korábban nagyobb ábrán



Kísérlet:

monokord :

ha a feszítőerőt 4x-re növeljük }
ha a húr hosszát felére csökk. } → az eredeti hang oktávját kapjuk

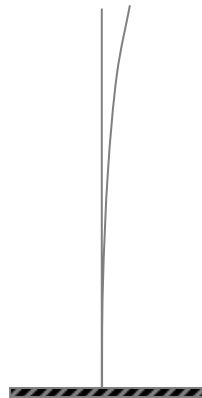
$$v_1 = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot q}}$$

a húr alaphangja

$$v_n = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot q}} = n \cdot v_1$$

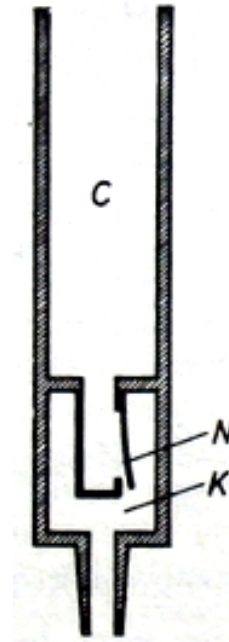
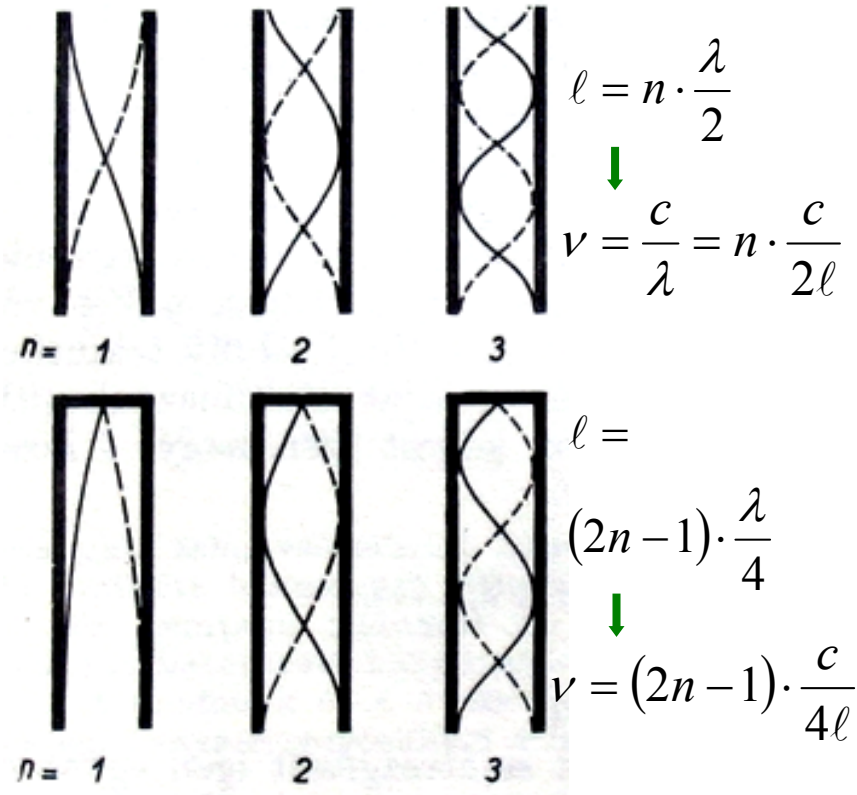
a felhangok (az alaphang harmonikusai)

pálcák rezgései :

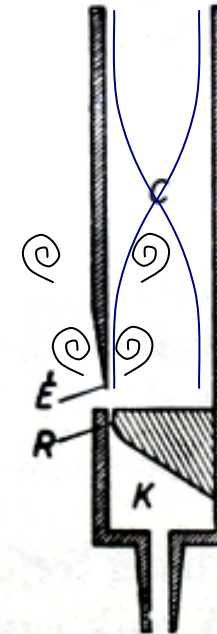


hangvilla
doromb

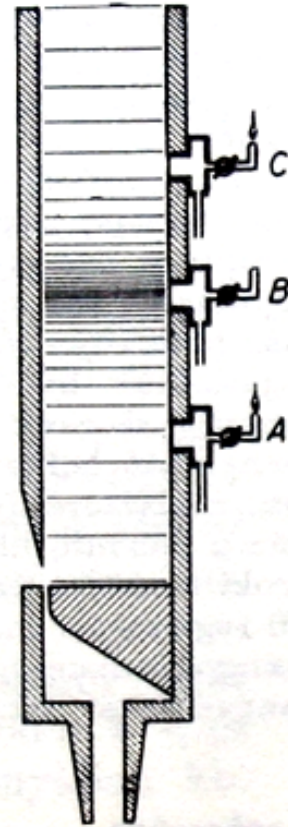
levegőoszlopok rezgései = sípok :



nyelvsíp



ajaksíp



Kísérlet:

sípok, furulya, stb...; sörösüveg;
hártyák (pl. dob), lemezek rezgései (Chladni-féle ábrák – ld. korábban)

Bagány Máté ...

trombita :

maestro music1.wmv